EЛEMENTE

DE

ЏEOMETRIE

TEORIKЪ ШІ ПRATIKЪ.

Традѹчере din францѹzеште

de

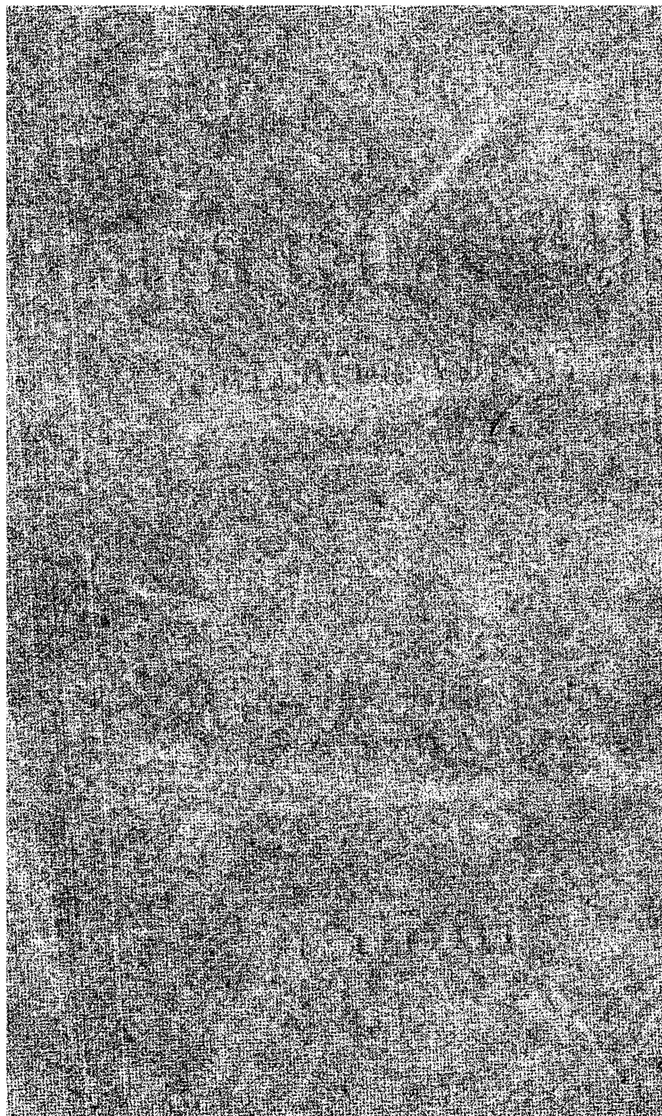
GERUL G. POP,

OP ÎN ЏІMNACIЅЛ NAЏIONAЛ.

БЅКЅРЕШТІ

ографіа Колеџіѹлѹі Naџіонал

1852



ELEMENTE

DE

ЏЕОМЕТРІЕ

ТЕОРЕТІКЪ ШІ ПРАКТІКЪ.

Sпре întребȣinџареа
Klaselor Elementare Koleџiale,
tpadȣчepe din fpanџȣzeште
dȣпъ
L. M. DESDOUITS.



de

SLUGERUL G. POP,

ПРОFЕSОР DE АРІТМЕТІКЪ ШІ ЏЕОМЕТРІЕ ÎN КОЛЕЏІȣЛ NАЏІОNАЛ ШІ ÎN ШКОАЛА ОSТЪШАSКЪ DЕ КАDЕЏЇ.





БȣКȣРЕШТЇ.
În Тіпографіеа Колеџіȣлȣї Naџіonaл.
1852

ЕЛЕМЕNТЕ

DE

ЏЕОМЕТРІЕ.

ТЕОРІЕ.

Прелімінаре (Апл. 1.)

1. Џеошеtріеа аре de обіект мъсѕрареа ші пропріетъціле întindepiĭ. Ачеаstъ zічере, каре însemneazъ мъсѕраре de пъмînt, аратъ оріџіnа шtiinџеĭ, ші прінчіпалѕл съѕ skoп.

Adевъръріле џеометріче demonstpate se нѕmesk теореме, ші se пот îмпърџі în doъ класе.

Чел d'întîĭ este кѕмпѕs de теореме пріімітоаре de о апліkаціе d'а dpeптѕл, пе каре ле пѕтем нѕмі теореме практіче.

Чел d'ал doiлеа копріnde прінчіпе че нѕ аѕ апліkаціĭ dipekte. În ачеst кas еле пот авеа ѕн îndoit skoп: 1°. De а слѕжі ла demonstpaціеа челор-лалте теореме; 2°. De а da інтеліџінџеĭ ѕн ексерчіціѕ folositop.

2. Întindepea аре треĭ dimensiĭ, каре se нѕmesk лѕнџіме, лъціме ші înълціме saѕ adîнчіме.

Тоате трѕпѕріле în natѕръ аѕ негреши ачеste треĭ dimensiĭ; dap se întîмплъ преа des ка нѕмаĭ о dimensie съ se іа în бъгаре de seамъ, фъкîndѕ-se аб-

stpakцie de чele-лalte doъ; кsm, spre eksemплs, лsnцimea snsĭ dpsm, adînчimea snsĭ пsц. O dimensie konsidepatъ ea sinгspъ, se nsmeщte o л i n i e.

Asemenea noate чinева черчeta snipea a doъ dimensiĭ neîngpiжind de чea d'aл tpeiлea. Astfeл este, spre eksemплs, întindepea snsĭ kîmn, komnssъ din o лsnцime шi o лъцime împpesnъ, шi în kape ns se ia în въгape de seamъ гposimea пъmîntsлsĭ. Snipea a doъ dimensiĭ fopmeazъ o s s n p a f a ц ъ.

De ва лsa чinева în въгape de seamъ чeле tpeĭ dimensiĭ împpesnъ, ва afлa sn s o л i d saŭ волsmin. Se nsmesk nsnkte xotapeлe шi intepsekцiiле лiniiлop. Пsnktsл aшa npiвit n'ape întindepe. Se maĭ nsmesk nsnkte шi пъpцiле чeле maĭ mічĭ din kape îшĭ înкinsеще чinева къ este komnssъ o лinie. Aчeste пъpцĭ aŭ negpeшit întindepe. Deoseвipea însъ dintpe aчeste doъ feлspĭ de nsnkte se ва лъmspi npin npaktikъ.

Лiniea se noate sokoti ka pessлtatsл miшкъpiĭ snsĭ nsnkt; ssnpafaцa, ka npodssъ npin miшкapea sneĭ лiniĭ; шi miшкapea sneĭ ssnpafeцe konpinde negpeшit sn snaцiŭ kape este sn soлid (Aп. 2).

3. Konfopm ks aчeste npinчine, noĭ вom împъpцi цeometpiea în tpeĭ пъpцĭ npinчinaле:

Чea d'întîiŭ ва tpakta despe л i n i ĭ; a doa despe s s n p a f e ц e; шi a tpeia despe волsmine.

ПАРТЕА ÎNTÎIЪ.

DESПРЕ ЛINII

DEFINIЦIЙ.

4. **Лinie dpeanтъ** se нъmeште dpъmъл чел maĭ skъpt de ла ъn пънкt ла aлtъл.

Este de tpeвъiнцъ a вьга de seaшъ къ ачеasta este нъmaĭ o definiцie, iap нъ apъtapea ъneĭ пpoпpietъцĭ a лinii dpeпte. Nъ este dap ъn пpiнчiп кape sъ aĭвъ tpeвъiнцъ de demonstpaцie, astfeл пpeкъш a пpetins-o oape-кape fiлosofĭ. În sfîpшit, esпepiinцa нe dъ ideea fiгъpeĭ ъneĭ лiniĭ dpeпte. Astfeл este, snpe eкseшплъ, ъn fip întins întpe doъ пънкte; saŭ maĭ вine, aчeastъ idee нe este fipeaskъ шi шaĭ вine de kît opĭ-че esпepiinцъ шi paцioнament.

Sokotind лiniea кa пpodъsъ din miшкapea ъnъĭ пънкt, вom ziче къ лiniea este dpeanтъ, kînd пънкtъл moвiл нъ se aвate din dipeкцiea sa чea d'întîiŭ. Aчeastъ definiцie вa aвea o пpeчisie îndestълътoape, пentpъ къ pesпъnde лa o idee пpiшъ, шi къ este къ непъtinцъ a нe îншълa despre dînsa.

Лinie fpîntъ se нъmeште aчeea кape este кoшпъsъ de maĭ mълte лiniĭ dpeпte în deosевite dipeкцiĭ; astfeл este (Fig. 1). AGDCB. (Aпл. 3).

În sfîpшit, opĭ-че лinie нъ este nічĭ dpeanтъ, nічĭ кoшпъsъ de лiniĭ dpeпte, se нъшeште **лinie къpвъ**; astfeл este AmnpB. Se înцeлeцe къ este o mълцime непъmъpatъ de лiniĭ къpвe difepite.

Пsнкtеле каре formеazъ ліпіеа кsрбъ, fiind неапърat întinse, аŭ о лsнціme ші doъ estpeшітъцї, întpe каре екsistъ о лinie dpeaпtъ. Аша dap opї-каре кsрбъ este комnsзъ de о мsлціme de лiniї dpeпte кît se поate de mічї. Ачеste лiniї dpeпte se нsmesк е л е ш е n t е л е кsрбеї.

Кsрбеле se deosiбesк întpe еле прin deoseбітеле позiціï але елементелор. De ва sокоti чiнева sn елемент dintp'ачеstea прелsнціt нехотърît în лinie dpeaпtъ, еа ва авеа нsmaї sn пsнкt комsn кs кsрба, ші se ва нsmi t а n ц е n t ъ.

Este de mape tpeбsinцъ а не familiapisa кs ачеste ноціï, ші кs senssл esпpesii н е m ъ р ц і n і t m і к, каре adesea ni se ва înfъціша. Nsmim кîtime н е ш ъ р ц і n і t m і к ъ о кîtiше реалъ, dap maї mікъ de кît opї-че кîtiше че se поate аръta. În stapea ачеasta пsтem sъ не înкinsim пърціле че fopmeazъ лiniiле (Апл. 4).

5. Întpe ssпpafeце se afлъ îшпърцірї ші definiціï аналоаце. Nsmim ssпpafaцъ плаnъ saŭ плаn opї-че ssпpafaцъ пе каре о лinie dpeaпtъ нехотърîtъ se поate апліка екsакt în opї-че sens. Орї-че ssпpafaцъ каре нs este нічї плаnъ, нічї комnsзъ de ssпpafeце плане, este о ssпpafaцъ к s р б ъ. (Апл. 5).

Konsideраціï аналоаце кs челе пречеdente не коndsк sъ konsiderъш ssпpafeцеле кsрбе ка комnsse de плаnsрї елементаре nemъpцinit mічї.

6. Параделеле sînt dpeпte каре, fiind aшъzate în ачелашї плаn, нs se пот întîлni opї кît s'ap прелsнці.

7. Nsmim s n г і ŭ sпaціsл нехотърît копpins întpe doъ dpeпte каре плек de ла ачелашї пsнкt.

Ne пвtem лesne înкiпвi natвра шi цeнepaцiea вnгiврiлор în кiпвл врmътор.

Sъ не înкiпвiш о dpeaпtъ fiксъ AB, (Fig. 2.) aсвпра ĸъpiia este кълкatъ о лinie тiшкъtoape, пвtînd a se întoapче împpeжвpвл пвnкtвлвi O ка întp'вn ъълвг, întoкmaĭ ка ачеле вnвĭ чeasopnik пе аксвл кadpanвлвi. În кîtъ вреше dpeanta neшiшкъtoape шi dpeanta fiксъ se вop koinчida, пв ва fi вnгiв, шi чеде doъ лinii se вop kotponi în вna sinгвpъ; dap îndatъ че dpeanta тiшкъtoape ва лва о nosiцie ка OC, ва fi вn вnгiв копpins întpe OB шi OC. Ачeste doъ лinii вop fi лatвpeлe вnгiвлвi; пвnкtвл O ïĭ ва fi вîpfвл. Ачest вnгiв se ва eнвnцiea пpin чеде tpeĭ лitepe BOC, пвind tot-d'авna în тiжлок лitepa вîpfвлвi. Daка dpeanta тiшкъtoape îшi ва врша тiшкареа, шi ва лва nosiцiiлe свкчesiве OD, OG, OH, OK, шчл., вnгiвл se ва шъpi din че în че, шi se ва шiкшора, daка dpeanta тiшкъtoape se ва întoapче înanoĭ. Dap пвtem бъгa de seamъ пpea лesne къ, daка ачeastъ dpeanтъ fopmeazъ de о napte вn вnгiв кв dpeanta fiксъ OB, fopшeazъ negpeшit шi вn алt вnгiв кв naptea stînгъ OA a ачesteĭ dpente fikse. Кв кît вnгiвл din dpeanta кpeшte, вnгiвл din stînгa каре ïĭ este алъtвpat, deskpeшte; шi чеea че este îmвedepat, ел deskpeшte eksakt кв кîtimea вnгiвлаpъ кв каре чел-алalt кpeшte. Аша dap ва вeni negpeшit вn moment în каре чеде doъ вnгiвpĭ алъtвpate вop fi еквале: întp'ачest kas, fiгвpat de dpeanta OH, ачeste вnгiвpĭ еквале se zik вnгiвpĭ d p e n t e, шi dpeanta каре ле fopmeazъ, se ziче п e p п e n d i к в л a p ъ. Ачeastъ din врmъ ziчepe se ва defini în лanгaцiвл вългар, nosiцiea внеĭ dpente

каре întîлнеште пе о а doa, фъръ а fi аплекатъ нічі întр'о парте. Требве о маре бъгаре de seamъ a нв se înшела чінева кв ideea комвнъ каре dъ zічерії перпеndікварь, sensвл dіреквії вертікале, adікъ sensвл внві fір кв вн глонц ла къпътіів че атірнъ спре пъмînt.

Маі 'nainte de a ажвнце ла посіціеа ОН, dреапта мішкътоаре фаче de о парте внгівpi маі мічі, de чеа-лалтъ внгівpi маі марі de кît вн внгів dрепт. În касвл întîів внгіврілe sînt асквціте; în чел d'ал doiлеа se нвмеsк онтвѕе.

Dреапта мішкътоаре врмîndв'ші dрвмвл dінколо de ОН, d'a stînга se афлъ нвмаі внгівpi асквціте, ші мішкътоареа ва коінчіdа кв партеа ОА а dрептеі fіксе. Întр'ачеst кас еа нв маі фаче внгів кв партеа ОВ, dар ажвнце хотарвл челеі маі марі dепъртърі пвtінчioase. Bedem къ ачеst хотар este спаціvл окnпат de челе доъ внгівpi dрепте.

Dар мішкареа нв se опреште ачі. Dреапта мішкътоаре поате тречe dіn жosвл лві AB, ші îmfъціша skімбърі asемeнea кв челе пречеdeнте; saв маі біне, пвтем zічe къ ачесте посіції аѣ fost asemenea окnпате de прелвнџіреа лініі мішкътоаре, пе кînd еа нетречe посіціiле челе de свs ОС, OD, шчл.; ші bedem къ, кînd мішкътоареа ажвнце ла посіціеа ОА, прелвнџіреа sa, каре а трекvт спаціvл de dedeсвбт, se кълкъ пе ОВ.

Astfeл dвпе квм bedem se наск ші se modifікъ внгіврілe; dар чееа че требве маі мвлт лват în бъгаре de seamъ este къ тоатъ лвареа ноастръ а мінте s'a аціntат нвмаі аsвпра dеspърціріі лініілор, ші къ лвнџімеа латврелор нв s'a sокотіt ка елемент

тревꙋінчіоs în ideea че нѣ am фъкꙋt despre мърimea ꙋнꙋї ꙋнгїꙋ, konsiderацiea ачестеї лꙋнцiмї este, în адевър, кꙋ totꙋл de прisos; латꙋреле шi ѕпацiꙋл че еле копрind пot авеа орї-каре întindере, saꙋ maї біне ле пꙋтем кꙋноsa нешърцinite; dар mika парte din еле че desemнъм дꙋпе обічеїꙋ, este destꙋлъ ка съ не dea о idee лъмꙋритъ despre depъртареа латꙋрелор, шi ачеаsta este tot че не тревꙋе.

8. Съ не înкinꙋim акꙋm доъ dрепте оаре-каре тъindꙋ-se întр'ꙋн пꙋнкт O (Fig. 3). Пꙋтем tot d'аꙋна кꙋноsа къ ачест пꙋнкt este вълꙋгꙋл împрежꙋрꙋл кърꙋia s'а întорs dреапта GH, кꙋноsatъ мішкътоаре, шi каре koinчide întiїꙋ кꙋ о dреаптъ statорnікъ AB. Вор резꙋлtа патрꙋ ꙋнгїꙋрї, опꙋсе кіте доъ доъ ла вірф, каре, fie аскꙋцite, fie dрепте, fie опtꙋсе, нꙋ вор fi de кіt tiпꙋл fiгꙋреї пречеdente. De ачееа, аплікінdꙋ-ї konsiderацiiле че ешіръ din diskꙋцiea мішкърiї de маї sꙋs, вом ведеа isворind, ка konsekꙋinце неміжлочite, прiнчiпеле ꙋрмътоаре че sint de прisos а ле demonstra.

I. «Toate ꙋнгiꙋріле dрепте sint екꙋале întре еле.» Fie-каре ꙋнгїꙋ dрепт окꙋпъ жꙋмътаtеа ѕпацiꙋлꙋї nemърцinit каре este în ачееашї парте а ꙋнеї dрепте, în планꙋл ꙋnde se афлъ ачест ꙋнгїꙋ.

II. «Доъ ꙋнгiꙋрї алътꙋрате окꙋпъ împреꙋнъ ачелашї ѕпацiꙋ че окꙋпъ доъ ꙋнгiꙋрї dрепте.» Tot ачееа se întîмплъ шi ла сꙋма ꙋнꙋї нꙋмър оаре-каре de ꙋнгїꙋрї α, β, γ, δ, форmate despre ачееашї парте а ꙋнеї dрепте AB, asꙋпра кърiia аꙋ ꙋн вірф komꙋn (Fig. 4). Asemenea se întîмплъ шi sꙋбт AB. Вом zіче къ сꙋма tꙋtꙋлор

ѹнгіѹрілор formate împрежѹрѹл ѹнѹї пѹнкt предѹesk пatрѹ ѹнгіѹрї dрepte.

III. Dоъ ѹнгіѹрї опѹse ла вîрf sînt екѹале (Fig. 3), пentрѹ къ реsѹltъ din ачеeaшї mішкаре. Dар ачest prінчіп se demonstрeazъ d'a dрeptѹл în кіпѹл ѹрmъtор: $\alpha+\delta=$ кѹ dоъ ѹнгіѹрї dрeпte, ка алъtѹрate; $\beta+\delta=$ кѹ dоъ ѹнгіѹрї dрeп-te, пentрѹ ачелашї кѹвînt; dар нѹmaї kîtъціmеле екѹале кѹ о ачеeaшї kîtime δ, пot face о ачеeaшї sѹmъ. Аша dар $\alpha=\beta$.

IV. Dака о dрeaптъ OG este перпendікѹларъ пе AB (Fig. 5), віче верsa ші ачеasta ва fi пе GOH. În adeвър $\alpha=\beta$, ѹнгіѹріле fiind dрeпte; saѹ $\gamma=\beta$ ка опѹse ла вîрf. Аша dар $\gamma=\alpha$; аша dар BO este перпendікѹларъ пе GOH (Апл. 7 ші 8).

9. Ѹn ѹнгіѹ, кѹ toate къ este stрîns întре dоъ лініï, este însъ ѹn sпаціѹ deskis Ка sъ'л închідem tребѹe ажѹtорѹл ѹнеї a tреia лініï. Орї че sпаціѹ închіs de лініï se нѹmeшte fігѹръ saѹ поліgon. Чеа maї simплъ fігѹръ аре неапърat tрeї латѹре.

Fігѹреле se deosibesk dѹпе нѹmърѹл латѹрелор лор. Чеа кѹ tрeї латѹре se нѹmeшte Тріѹнгіѹ; чеа кѹ патрѹ латѹре, Патрѹлатѹр; чеа кѹ чінчї, Пеn-dagon; кѹ шаse, Екsagon; ѹрmeазъ dѹпе ачеasta Епtagonѹл, Оktagonѹл, Dекаgonѹл, шчл. Nѹmaї тріѹнгіѹріле ші патрѹлатѹреле аѹ прорріеtъції folositoаре. Ачеste dоъ felѹрї de fігѹрї копрінd deoseбite sпеціï.

Nѹmim тріѹнгіѹ екѹілатѹрал (Fig. 6) ачела каре аре kîte tреле латѹре екѹале; este înbedeрat къ аре пentрѹ ачеasta ші kîte tреле ѹнгіѹрї екѹале. Вom da кѹ toate ачеstea demonstраціea maї depарte. (n^{o} 18).

Dака tpiѕnгюл ape nѕmaï doъ лatѕpe екѕале, îл nѕmesк tpiѕnгiѕ isosчeл (Fig. 7). În казѕл ачеsta, челе doъ ѕnгюpï onѕse вop fi asemenea екѕале, прекѕm se ва demonstpa (n° 18).

De este nenotpiвipe întpe челе tpeï лatѕpe, tpiѕnгюл se nѕmeшte sкалеn (Fig. 8). Afapъ de aчеаsta, ѕn tpiѕnгiѕ noate авеа ѕnѕл din ѕnгюpiле sале dpente; atѕnчï se ziчe tpiѕnгiѕ dpentѕnгiѕ. Лatѕpa onѕsъ ѕnгюлѕï dpent se nѕmeшte Inotenѕsъ.

Întpe natpѕлatѕpe se deosiвesк:

Пътpatѕл (Fig. 9), кape ape ne toate челе natpѕ лatѕpe шi челе natpѕ ѕnгюpï але sале екѕале. Вош веdea maï ла ваде къ aчеstea sînt negpeшit dpente.

Dака nѕmaï челе natpѕ лatѕpe sînt екѕале, авеm Лozanжѕл. (Fig. 10).

Dpentѕnгiѕл (Fig. 11), кape ape кîte natpѕ ѕnгюpï екѕале, шi лatѕpeле onѕse кîte doъ doъ екѕале.

Паpaлелогpamѕл (Fig. 12), кape ape лatѕpeле onѕse паpaлеле.

În sfipшit, Tpanezѕл (Fig. 13), але къpѕia nѕmaï doъ лatѕpe sînt паpaлеле întpe еле.

Opï-че dpeantъ кape ѕneшte вîpfѕpiле a doъ ѕnгюpï неaлътѕpate, se nѕmeшte Diaгoналъ, прекѕm este AB (Fig. 14).

Basѕл ѕnѕï tpiѕnгiѕ este ѕna din лatѕpeле sале ne кape se sокоteшte къ ap fi aшъzatъ fiгѕpa; алеџереа eï este dѕne вое. Atѕnчï nѕmim înълџime a tpiѕnгюлѕï nepnendiкѕлapa кoвopîtъ din вîpfѕл onѕs

пе ачest вas. Kînd tpiѫпгюл este isosчeл, se ia de вas tot d'aѫna лatѫpa чea пeeкѫaлъ кѫ чeлe-лaлte doъ.

Fie-кapе din пatpѫлatѫpeлe sѫs apътate ape doъ вasѫpї пapaлeлe. Înълцiшea пatpѫлatѫpѫлѫї este пepпendiкѫлapa apdiкatъ пе ѫпѫл din чeлe doъ вasѫpї, пînъ se вa îъtiлni кѫ чeл-лaлt. Bom dовedi къ ea este пepпendiкѫлapъ шi пе aл doiлea вas.

Doъ поліgoaпe se zік екѫiлatѫpaлe întpe eлe saѫ ѫпѫл aлtѫia, кînd лatѫpeлe ѫпѫia, de шi пeeкѫaлe întpe eлe, sînt екѫaлe лatѫpeлop чeлѫї-лaлt, пъzind ачeлa'шї pînd лa коntѫpѫл saѫ пepiшetpѫл лop.

Dintp'ачeasta se înцeлeцe че însemneazъ esпpesiea поліgoaпeлop екѫiѫпгe întpe eлe.

În sfîpшit o figѫpъ поate fi fopшatъ de лiniї dpeпte saѫ кѫpвe: în чeл d'întiїѫ кas, figѫpa este peкtiлinie; шi în чeл d'aл doiлea, кѫpвiлiniе. Ea вa fi fopшatъ de amîndoъ feлѫpiлe de лiniї.

---

§ 1. DESПPE ЛINIEA DPEAПTЪ.

Teopeme fondamentaлe peлatiвe лa лiniea dpeaпtъ.

Teorema I.

10. «În opї-че tpiѫпгїѫ, fie-кapе лatѫpъ este «maї miкъ de кît sѫma чeлop-лaлte doъ.»

Deш. În adeвъp, fie-кapе лatѫpъ fiind o лiniе dpeaпtъ, este distanцa чea maї sкѫptъ întpe estpeшitъцiлe saлe. Aшa dap, шчл.

Teorema II, (Апл. 9 ші 10).

11. « Доъ пънтърї sînt требъinчioase ші destъле «ка sъ determineze о лinie dpeaптъ (Fig. 15) »

Dem. Ѹn пънкт sinгър нъ este destъл, пentpъ къ, пpintp'ън ачелашї пънкт, пътеш faче sъ тpeакъ о мълціme de лiniї dpente; saъ каpe este tot ачeea, о dpeaптъ se поаte întoapче împpeжъpъл ачestъї пънкт, лъînd о мълціme de посіціï deosebite. Dap zik къ ънеї dpente i se хотъpаште посіціea пpintp'ън ал doiлеа пънкт, saъ къ алцї тepminї, къ opї-че dpeaптъ каpe ва тpeче пpin ачелеашї доъ пънктърї se ва котpопі neste tot къ чea d'întîiъ.

În adeвъp, fie A, B, (Fiг. 15) челе доъ пънктърї date; челе доъ dpente se воp котpопі maї întîiъ întpe ачеste доъ пънктърї; пentpъ къ лiniea dpeaптъ, fiind дpъмъл чел maї skъpt de ла ън пънкт ла алтъл, нъ поаte fi întpe доъ пънтърї de кit о sinгъpъ лinie dpeaптъ; пе лîнгъ ачestea, еле нъ se пot despъpці нічї în пънктъл B, нічї maї înколо, къчї sъ sъпънem къ еле iaъ, ъна dipeкціea BC, чeea-лалтъ dipeкціea BG. Sъ dъчem пpind B о а тpeia dpeaптъ оаpе-каpe BD. Ачeasta тpeбъe sъ fakъ къ fie-каpe din челе-лалте доъ о sъmъ de ънгюpї екъале къ доъ dpente (n^o 8); dap ачeasta нъ se поаte, afapъ нъmaї dака ва fi ънгюл DBC=DBG, saъ паpтea екъалъ тотълъї: чeea че este neste нътінцъ. Аша dap шчл.

Teorema III. (Апл. 11).

12. « О лinie fpintъ în доъ пъpці, AO, OB, ші înконжоpатъ de о алтъ лinie fpintъ ACB, тъpцinindъ-se ла ачелеашї estpemitъцї A ші B, este maї skъptъ de кit лiniea înконжоpътоаpе (Fig. 16).»

Dem. Прin пвнкtвл O sъ dвчеш o dреаптъ оаре-каре GH, вom авеа (10) AO шаї mікъ de кіt AG+GO; asemenea BO шаї mікъ de кіt BH+OH. Аша dар AO+BO, saв лiniea fpîntъ d'înъвntpв este шаї mікъ de кіt AG+GO+OH+BH; аша dар кв atіt maї швлt кввînt, de кіt AG+GC+CH+BH, пentpв къ GC+CH sînt maї швлt de кіt GO+OH. Аша dар шчл.

Teorema V. (idem).

14. «Doъ tpівнгівpї sînt еквале, кînd ав o латвръ еквалъ копpinsъ întpe doъ внгівpї еквале внвл кв алtвл (Fig. 18).

Dem. Sъ пвнеш латвра HK пе чеа еквалъ кв dînsa AB. Внгівpіле A шi B, fiind pesпектів еквале внгівpілор H шi K, ачеstea se вор котponi în toatъ întindepea лор, шi челе doъ латвре GH шi GK se вор пвне пе AC шi BC. Аша dар пвнкtвл G каре ціне de amîndoъ челе d'întiiв, ва къdea негрешit de o datъ пе amîndoъ челе d'ал doiлеа; аша dар ва къdea în C; аша dар челе doъ tpівнгівpї se вор котponi пеste tot. Аша dар, шчл.

Teorema IV. (idem).

13. Doъ tpівнгівpї sînt еквале, кînd ав вn внгів еквал копpins întpe латвре еквале вна алtеia (Fig. 17).

Dem. Sъ пе înкіпвіm латвра GK пвсъ пе чеа еквалъ кв dînsa CB, еле se вор котponi. Внгівл G fiind еквал кв внгівл C, ва къdea пе dînsвл astfeл în кіt se вор котponi de tot. În datъ GH ва коinчіda кв чеа еквалъ кв dînsa AC; аша dар

челе доъ пънктъpĭ H шi K se вор kotponi кв A шi B, шi челе доъ tpiвnгюpĭ se вор kotponi negpeшit. Аша dap шчл.

Теорема VI. (idem).

15. Доъ tpiвnгюpĭ sint ekвале kind aŭ kite tpeле latвpeле лор ekвале вna alteia (Fig. 19).

Хem. Fie ачeste доъ tpiвnгюpĭ ABC, DGH (Fig. 19). Дака, fiind basвл челвĭ d'ал doiлea пвs пе чел ekвал кв dinsвл AB, вipfвл A ва koinчida кв вipfвл C, челе доъ tpiвnгюpĭ se вор kotponi in toatъ intindepea лор. Дар, zik къ пвntвл H ва къdea in C: къчĭ altfeл ва кърdea saŭ inъвntpвл tpiвnгюлвĭ ABC, in O sпpe eksemплв, saŭ пе вna din latвpe, пpekвm in K, saŭ afapъ din tpiвnгю, пpekвm in P. Insъ kite tpeле ачeste kasвpĭ sint neste пвtinцъ.

Intp'адевър, 1° Дака пвnktвл H ар кърdea in O, свma челор доъ latвpe $AO+BO$ ар fi (n° 12:) maĭ mikъ de kit $AC+BC$: чеea че este inпpotiва inotesвлвĭ.

2° Пвnktвл H нв поate кърdea in K, пentpв 'ачелашĭ kввint.

3° Пвnktвл H нв поate кърdea afapъ din tpiвnгю in пвnktвл P. Intp'адевър, авem (n° 10) $MQ<IQ+IM$; asemenea $NP<IP+IN$; аша dap $MQ+NP<IQ+IM+IP+IN$, saŭ $MQ+NP<MP+NQ$; saŭ пвind пе MQ in локвл лвĭ MP чел ekвал кв ел, авem $MP+NP<MQ+NQ$: чеea че este imпpotiва inotesвлвĭ потpiвipiĭ latвpелор. Аша dap шчл.

Insemnape.

16. Bedem къ доъ tpiвnгюpĭ sint intpв toate ekвале kind aŭ tpeĭ пърцĭ ekвале вna alteia, destвл

нвmaї ка ачеste tpeї пърцї sъ нв fie челе tpeї вnгюрї. Вom вedea квеіntвл maї ла вале.

Челе tpeї teopeme пpечedente sînt елементеле de demonstpaцie пentpв челе maї мвлte пponosiцiї але Цеometpieї; шi пentpв ачеasta noї ле pекоmanдъm кв stъpвipe елевілор. Teopemeле aв maї totd'aвna de sкоп a doвedi потpівipea внвї вnгю saв a внеї лiniї, кв вn алt вnгю saв кв о алтъ лinie; шi кіпвл оБічнвit ка sъ ажвnцem ла ачеst sfîpшit konstъ maї adesea întpв a doвedi къ кîtimeлe a къpopa nотpівipe воim sъ аpътъm, цin de tpiвnгюpї каpe, двпe dateлe чеpepiї тpeвве sъ fie кв totвл еквале. Este дap de mape тpeввinцъ a нв пepde din вeдеpe ачеste miжлоаче.

Teorema VII.

17. Daкa доъ tpiвnгюpї ABC, DHK (Fig. 20) aв доъ латвpe еквале вna алteia, шi вn вnгю B, копpins întpe латвpeле челвї d'întiю, sъ fie maї mape de кît вnгюл H копpins întpe але челвї d'ал doiлea, латвpa AC, опвsъ вnгювлвї B, вa fi maї mape de кît латвpa DK опвsъ вnгювлвї H, шi віче вepsa.

Dem. Sъ не înкіпвim tpiвnгюл DHK tpansпоptat în ABG, DH fiind апліkatъ пe чеа еквалъ кв dînsa AB, шi пвnкtвл G fiind пosiцiea че ia atвнчї вîpfвл K. Вnгюл totaл GBC se компвne atвнчї de свma челор доъ вnгюpї B, H. Sъ desпъpцim ачеst вnгю totaл în доъ пъpцї еквале пpintp'о дpeanтъ BI, каpe вa къдеа пeгpeшit înъвntpвл вnгювлвї челвї mape ABC, шi вa тъia вasвл întp'вn пвnкt I. Sъ внim IG, челе доъ tpiвnгюpї GBI, CBI aвînd пpin коnstpвкцie вn вnгю еквал копpins întpe латвpe

екꙋале ꙋна алteia, sînt екꙋале (n^o 13). Аша dap авem IG=IC. Dap în tpiꙋпгюл AGI авem $AG < AI+IG$; аша dap $AG < AI+IC$; чеea че voipъm sъ demonstpъm, пentpꙋ къ AG пꙋ este алт de кît DK.

Віче верsа, daка doъ tpiꙋпгюрї аꙋ doъ латꙋpe екꙋале ꙋпа алteia, iap челе d'ал tpeiлea латꙋpe sînt неекꙋале, atꙋпчї латꙋpeї челеї maї mapї ва kopeѕпꙋnde чел шаї mape ꙋпгю. Întp'adeвъp, daка ачеasta пꙋ este аша, saꙋ челе doъ ꙋпгюрї вop fi întpꙋ toate екꙋале (n^o 13), чеea че este înпpotiва inoteѕꙋлꙋї; saꙋ maї біne латꙋpeї челеї maї шapї ва kopeѕпꙋnde ꙋпгюл чел maї mik: чеea че este împpotiва пponoziцieї dipekte.

Înѕemпape.

Челе doъ ꙋпгюрї adiaчente în B вop пꙋtea faче o sꙋmъ maї mape de кît doъ dpente. Sпацiꙋл ꙋпгюлар че ва peѕꙋлta dintp'ачеasta se ва пꙋtea кꙋ toate ачеstea împъpцi în doъ пъpцї екꙋале, шi paцionamentꙋл de maї sꙋs ва sꙋбsta întpꙋ toatъ întpeцimea sa.

Теорема VIII. (Апл. 18).

18. În fie-каpe tpiꙋпгю isosчел, ꙋпгюpiле опꙋse латꙋpeлор екꙋале, sînt екꙋале.

Dem. Fie tpiꙋпгюл ABC (Fig. 21), în каpe авem пe AC=BC. Sъ ꙋnim вîpfꙋл кꙋ mіжлокꙋл баѕꙋлꙋї пpin o dpeantъ Cm. Челе doъ tpiꙋпгюрї ACm, BCm sînt екꙋале ка ꙋпеле че аꙋ кîte tpeле латꙋpe екꙋале, adiкъ Cm комꙋпъ, AC=BC пpin inotes, шi $Am=Bm$ пpin konstpꙋкцie. Аша dap ꙋпгюpiле A шi B sînt екꙋале.

Короларе.

I.

Ор-че trіѫнгіѫ екѫілаtерал аре кîtе tреле ѫнгіѫрї екѫале.

II.

Dреаta Cm каре ѫнеште вîрfѫл ѫнѫї trіѫнгіѫ isosчел кѫ шіжлокѫл басѫлѫї, este перпендікѫларъ пе ачеst бас. Пентрѫ къ din поtрівіреа челор доъ trіѫнгіѫрї ACm, BCm, резѫltъ потрівіреа челор доъ ѫнгіѫрї adіачеnte AmC, BmC; аша dар, ачеste ѫнгіѫрї sînt dрепtе. Аша dар Cm este перпендікѫларъ.

Теоrема IX.

19. Вічеверsа, dака доъ ѫнгіѫрї sînt екѫале în ачелашї trіѫнгіѫ, латѫреле опѫsе вор fі екѫале, шi trіѫнгіѫл ва fі isosчел.

Dem. Fie trіѫнгіѫл ABC (Fig. 22), în каре челе доъ ѫнгіѫрї A, B sînt екѫале. Dака латѫреле опѫsе нѫ sînt екѫале, fie BC чеа маї маре din доъ. Пѫтем лѫа пе dinsа о мърime BD екѫалъ кѫ латѫра чеа маї мікъ AC. Съ ѫnim пе AD. Челе доъ trіѫнгіѫрї ABC, ABD ар авеа ѫn ѫнгіѫ екѫал копріns intре доъ латѫре екѫале ѫна alteia, adікъ: $BAC = ABD$ прin іпоtes; $BD = AC$ din конstрѫкціе; шi AB латѫръ комѫнъ. Аша dар (n^{o} 13) еле ар fі екѫале, чеа че este кѫ непѫtinцъ.

Теоrема X. (Апл. 12).

20. În ор-че trіѫнгіѫ, ѫнгіѫлѫї челѫї

шaĭ шаре і se опѕне латѕра чеа шaĭ шаре, шi вічеверsa.

Dem. Fie tpiѕнгюл ABC (Fig. 23), în каре A>B, пѕtem лѕа în A о парte екѕалъ кѕ чел шaĭ шiк B; fie dѕсъ AD, astfел în кît DAB=ABD: dintp'ачеаsta ва pesѕлta dѕпе teopema пречеdentъ AD=BD. Dap, în tpiѕнгюл ACD, авеш AC<CD+AD, saŭ пѕind în локѕл лѕĭ AD пе чеа екѕалъ кѕ dînsa BD, авеm AC <CD+DB: чееа че tpeбѕia sъ demonstpъm.

Речіпрока se ва demonstpa ка a teopeшiĭ VII.

ПЕРПЕNDІКОЛАРЕ шi ОБЛІЧЕ.

Теорема XI. (Апл. 13).

21. **Прintp'ѕн пѕнкt лѕat пе о dpeaпtъ saŭ afapъ dintp'о dpeaпtъ, нѕшaĭ о перпенdіколаръ пѕtem dѕче ла ачеаsstъ dpeaпtъ** (Fig. 24).

Dem. Daка пѕнкtѕл este пе dpeaпta, doъ deoseбite перпенdікѕларе вор determina ѕнгюpĭ dpeпte neeкѕале, чееа че нѕ поate fi.

Sъ sѕпѕнem къ пѕнкtѕл P este лѕat afapъ din dpeaпta AB, шi fie HO о перпенdікѕларъ; zік къ нѕ пѕtem dѕче о a doa PI

În adeвъp, sъ прелѕнџim пе PO de о лѕнџime екѕалъ лѕĭ GO, шi sъ ѕнiш GI, tpiѕнгiѕл de жоs ва fi екѕал tpiѕнгiѕлѕĭ de sѕs, пentpѕ къ aŭ ѕн ѕнгюĭ екѕал копpins întpe латѕpе екѕале ѕна alteia; adікъ ѕнгюpiле în O, ка dpeпte; латѕpа OI кошѕнъ, шi GO=PO din konstpѕкціе. Аша dap челе doъ ѕнгюpĭ în I sînt екѕале; аша dap еле sînt dpeпte, daка PI este sokotitъ перпенdікѕларъ.

Dap întpe doъ пѫnktѫpĭ nѫmaĭ o лinie dpeaптъ пѫtem авеа; iap, npin konstpѫkцie, PG este o dpeaпtъ; awa dap PIG nѫ este o dpeaпtъ; awa dap пpeлѫnцipea în лinie dpeaпtъ a лѫĭ PI, ва fi o dipeкцie IK deosebitъ de GI. Dap atѫnчĭ se ва afлa пe PK în пѫnktѫл I o sѫmъ de ѫnгiѫpĭ maĭ mape de kît doъ ѫnгiѫpĭ dpente, чeea чe este кѫ neпѫtinцъ (8). Awa dap w ч л.

Însemnape.

Este лesne de înцeлes къ tpiѫnгiѫл infepiop nѫ este aлt de kît paбatepea tpiѫnгiѫлѫĭ sѫnepiop чe am fi întops împpeжѫpѫл лinii OI ка o цiцinъ.

Teorema XII. (Aпл. 14, 15, 16, 17).

22. Singѫpa пepпendikѫлapъ чe пѫtem dѫчe dintp'ѫn пѫnkt пe o dpeaпtъ, e maĭ skѫptъ de kît op кape aлtъ лinie чe am dѫчe dintp'aчest пѫnkt пe dpeaпta: aчeasta se nѫmewte oблiкъ (Fig. 24).

Dem. Fie PO пepпendikѫлapa wi PI oблiка. Paбътînd tpiѫnгiѫл sѫnepiop sѫbt IO, вom авеа PG=2PO wi PIG=2PI. Dap лiniea dpeaптъ PG este maĭ skѫptъ de kît чea fpîntъ PIG; awa dap жѫmъtatea чeлeĭ d'întîiѫ este maĭ skѫptъ de kît жѫmъtatea чeлeĭ d'aл doiлea; awa dap PO este maĭ mikъ de kît PI. Awa dap w ч л.

Кoponap.

Awa dap пepпendikѫлapa este distanцa чea maĭ skѫptъ de лa ѫn пѫnkt лa o лinie dpeaптъ; awa dap ea tpeбѫe sokotitъ ка adeвъpata distanцъ.

Teorema XIII.

23. **Doъ obлiче ekвaлe depъrtate de перпendiкvлaра sînt ekвaлe; шi din doъ obлiче neekвaлe depъrtate de перпendiкvларъ, чea maĭ mape este чea maĭ depъrtatъ de перпendiкvларъ.**

Dem. Fie OK=OI (Fig. 25); triвnгivл POI nв este aлt de kît рabaterea triвnгivлvĭ POK че am fi întops îmпрежvрvл лvĭ PO; aшa dap PK=PI.

Aл doiлea, рabъtînd svbt AB, чeлe doъ triвnгivрĭ POK, POB, вom aвea лiniiлe PKG, PBG, respektiв îndoite de kît PK, PB; dap лiniea PKG este maĭ skvrtъ de kît лiniea înkonжvрътoape PBG; aшa dap жvmъtatea чeлeĭ d'întiĭ este maĭ mikъ de kît жvmъtatea чeлeĭ d'aл doiлea; aшa dap PK este maĭ mikъ de kît PB.

Королар.

Dintp'vn пvnkt пvtem dvче tot d'avna пe o dpeaпtъ doъ aлte dpenтe ekвaлe, iap пв шi treĭ, пentpв kъ чea d'aл treiлea вa fi saŭ перпendiкvлaра, kape вa fi maĭ skvrtъ de kît чeлe-лaлte doъ, saŭ o obлiкъ kape se depъrteazъ de перпendiкvлaра maĭ mvлt saŭ maĭ пvцin de kît чeлe-лaлte doъ, шi kape prin vрmape este maĭ лvнгъ saŭ maĭ skvrtъ.

Teorema XIV. (Апл. 18).

24. **Daka în miжлokvл vneĭ dpenтe xotъrîte AB, вom apdika o перпendiкvларъ: 1° Toate пvnktvрiлe aчesteĭ перпendiкvлape вop fi, fie-kape, d'oпotpiвъ depъrtate de чeлe doъ estpemitъцĭ aлe**

dpeптеĭ; 2° Op че пꙋнкt aflat afapъ din пepпendiкꙋлapa вa fi нeeкꙋaл depъptat de ачелеашĭ estpemitъцĭ (Fig. 26).

Dem. Fie P ꙋн пꙋнкt oape-кape aл пepпendiкꙋлapeĭ; облічеле PA, PB, sint d'onotpівъ deпъptate de пepпendiкꙋлapъ; аша dap PA=PB; аша dap 1° шчл.

Aл doiлea, fie ꙋн пꙋнкt I afapъ din пepпendiкꙋлapъ; sъ dꙋчem IA, IB; авem IB maĭ шiк de кit IP+PB; dap PB=PA dꙋпъ чеea че пpeчede; аша dap IB este maĭ mік de кit IP+PA. Аша dap IB este шaĭ mік de кit IA, чеea че demostpeazъ пaptea a doa a teopemeĭ.

Teorema XV.

25. Doъ tpiꙋнгiꙋpĭ dpeнtꙋнгe sînt eкꙋaле кînd aꙋ inoteнꙋsa eкꙋaлъ шi o лatꙋpъ eкꙋaлъ ꙋнa кꙋ aлta.

Dem. Fie чеeле doъ tpiꙋнгiꙋpi BAC, GDH (Fig. 27), în кape авem AC=DG; BC=GH. Sъ пꙋнem пe DG пe чеa eкꙋaлъ кꙋ dînsa AC. Ꙋнгiꙋpiле dpeнte fiind eкꙋaле, лatꙋpa DH вa лꙋa dipeкцiea AB. De se tepmina în пꙋнкtꙋл B, челе doъ tpiꙋнгiꙋpĭ s'ap кoтpoпi întpꙋ toate. Dap нꙋ se noate tepшina aiꙋpea, кꙋm snpe eкsemплꙋ în пꙋнкtꙋл I. Пentpꙋ къ atꙋнчĭ inoteнꙋsa GH s'ap face CI. Dap CI ка maĭ пꙋцin depъptatъ de пepпendiкꙋлapa CA, вa fi шaĭ шiкъ de кit BC. Челе doъ inoteнꙋse вop fi dap нeeкꙋaле, чеea че este împotiвa inotesꙋлꙋĭ. Аша dap шчл.

Paцionamentꙋл ap fi fost ачелашĭ шi daкa пꙋнкtꙋл I s'ap fi aflat dinколо de пꙋнкtꙋл B.

Teorema XVI.

26. Doъ tpiꙋнгiꙋpĭ dpeнtꙋнгe sînt

екꙋале кînd аꙋ іпотенꙋѕа екꙋалъ шi ꙋн ꙋнгiꙋ екꙋал ꙋнꙋл кꙋ алтꙋл.

Dem. Fie (Fig. 28) ꙋнгiꙋл D=C шi BC=DH. Sъ пꙋnem DH пе чеа екꙋалъ кꙋ dînsa BC. Ꙋнгiꙋл D екꙋал ꙋнгiꙋлꙋї C, îл ва котропі пеste tot, шi DG ва лꙋа dірекціеа CA. Dака пꙋнкtꙋл G къdea în A, челе доъ tрiꙋнгiꙋрї se котропеа. Dар ел нꙋ поate къdea аiꙋреа, în пꙋнрtꙋл I sпре ексемплꙋ, къчї атꙋнчї tрiꙋнгiꙋл CIB п'ар fi алt de кît tрiꙋнгiꙋл GDH; шi ꙋнгiꙋл CIB ар fi ꙋн ꙋнгiꙋ dрепt. Dар ꙋнгiꙋл A este iаръшї ꙋн ꙋнгiꙋ dрепt; am авеа dар dintр'ꙋн ачелашї пꙋнкt B доъ перпendікꙋларе коборite пе ачееашї dреаптъ AC; чееа че este пеste пꙋtinцъ (n^o21).

DESПРЕ ПАРАЛЕЛЕ.

Definiцiї.

27. Noї am definit паралелеле, доъ dрепte каре fiind ашеzate în ачелашї план, нꙋ se пot întîлni ор кît se вор прелꙋнцi.

Ꙋрmeazъ dintр'ачеаsta, къ доъ dрепte sꙋпꙋse неапаралеле, треꙋе негрешit sъ se întîлneаскъ.

Este о мꙋлціme de sisteme de доъ dрепte каре нꙋ se пot întîлni, шi каре кꙋ toate ачестеа нꙋ sînt паралеле; прiчiна este къ еле нꙋ împлinesк kondiціеа d'a fi în ачелашї план. Ast-fel ар fi касꙋл ꙋнꙋї fiр întins оріzontал, întр'о dепъртаре de каре вом atîрна ꙋн fiр кꙋ плꙋmв. Ачесtе доъ fiре вор fi înкрꙋчiшate înпротiвъ ꙋнꙋл de чел-лалt, dар fъръ а se atinцe нiчї а se пꙋtea întîлni.

О dреаптъ astfeл ка AB (Fig. 30), каре întîлнеште доъ лінiї паралеле, se нꙋмеште sекантъ.

Параleleле formeazъ кв sекаnta вn пвшър оаре-каре de вnгiюрï, каре требве а fi біне deoseбіte.

Челе doъ вnгiюрï β, α', disnвse tot întp'ачелашï кin întpe параleле шi sекаntъ, se пвшеsк вnгiюрï коpеsпвnzъtoаре.

Вnгiюрiле α, α' ашеzate întpe параleле, dap din пърцï опвse але sекаntеï, se пвшеsк вnгiюрï алtерпе intерпе. Алътвреа кв ачеste doъ вnгiюрï каре sînt аsквцitе, se гъsеsк аlte doъ каре sînt опtвse, шi каре sînt iаръшï алtерпе intерпе.

Пе din афаръ de параleле se гъsеsк вnгiюрï β, β', апалоаце кв челе пречеdente, каре se пвшеsк алtерпе еstерпе. Tot asemenea este шi кв вnгiюрiле опtвse каре ле sînt алътвpate.

Вnгiюрiле α, δ se пвшеsк вnгiюрï intерпе. În sfîpшit, ор че вnгiю алътврат кв алtвл, шi fъкînd кв dînsвл о sвшъ еквалъ кв doъ dpепte, se пвшеште sвпleшеntвл sъв. Вnгiюрiле α', δ, sînt sвпleшеnte вnвл алtвia.

Teorema XVII.

(Апл. 19, 20, 21, 22, 23).

28. Doъ перпеndiквларе ла о ачееашï dpеаптъ sînt параleле întpe еле.

Dem. În аdевър, dака еле ар пвtеа sъ se întîлneаsкъ, аm авеа din пвпктвл întîлпiрiï doъ перпеndiквларе коборite пе о ачееашï dpеаптъ; чееа че este пеste пвtinцъ. Аша dар шчл.

Teorema XVIII. (idem).

29. Fie (Fig. 29) о dpеаптъ BC перпеndiквларъ

пе AK, ші AD о облікъ ла ачеаstъ dреаntъ AK, обліка ва întîлni неgрешit перпеndікsлара.

Dem. În пsнкtsл A sъ аpdікът перпеndікsлара AG. Daка teopema nomenitъ пs 'ші ар авеа локsл, snaцisл nexotърît каре коmпsне sнгisл DAK, ар копpinde ші ар ковîрші snaцisл каре коmпsне sнгisл dрепt CBK. Dap toate sнгisріле dpente fiind ексале, snaцiisл sнгisлар DAK ва fi ші ел maî mape de кît GAK, каре este чел ексал кs ал лsî CBK; saŭ партеа ва fi maî mape de кît totsл. Аша dap шчл.

Daка облікa фъчеа sн sнгis оntss din партеа перпеndікsлареі (Fig. 29), прелsнцiреа sa din жоssл лsî AK ар face sн sнгis asksцit, ші atsнчî s'ар întîлni кs перпеndікsлара пе dedesssbt.

Королар.

30. O dpeantъ перпеndікsларъ ла алtа, este asemenea перпеndікsларъ ші пе паралела sa. În adевър, în kassл kontpap, еа ар face кs паралела doъ sнгisрî каре n'ар fi dpente. Челе doъ паралеле ар fi dap sна перпеndікsларъ, чеа-лалtъ облікъ ла о ачееаші dpeantъ; аша dap aчeste doъ паралеле s'ар întîлni, чееа че este nesteпsтinцъ.

Însemnape.

Ачеаstъ teopemъ este кsnoskstъ sssbt nsmeле de nostsлatsm лsî Esкліd, пentps къ ачest Цeometps а sokotit de npisos saŭ къ nenstinцъ а'î da demonstpaцiea. Msлцi s'aŭ înчеркat ка sъ'î dea о demonstpaцie simплъ ші pigspoasъ, ші neatîpnatъ de konsidepaцiea snaцisрілор nemъpцinite. Ачеаstъ din spmъ kondiцie, afapъ къ este абsspdъ, fiind къ sнгisріле

нѫ sînt алt чева de кît spaцiѫрĭ de ачеаstъ natѫръ, аѫ zъdърnічit toate ачеste înчеркърĭ. Лъsînd ачеаstъ mърциnipe, se поate demonstpa teopema în mѫлte кiпѫрĭ. O demonstpaцie din ачestea, aflatъ кît пentpѫ fond de платоnікѫл Прокл8, шi modifікatъ de iesѫitѫл Клавiѫ, este кѫnoskѫtъ sѫбt nѫmеле лѫĭ Beptpand de ла Џenева. (Bezĭ Џeometpiea D. Binsent). Noĭ пpeфepъm, ка maĭ simплъ, кѫ toate къ întemeiatъ пе konsidepaцiĭ de ѫn ачелашĭ fel, пе чеea че am аpъtat maĭ sѫs.

Teorema XIX. (idem).

31. Daка doъ параллелe se tae de o sekantъ, вош авеа ѫpmъtoapеле pesѫлtate:

1° Ѫnгiѫpiле алtepne intepne sînt екѫале.

2° Ѫnгiѫpiле алtepne estepne sînt екѫале întpe еле шi екѫале кѫ алtepnеле intepne.

3° Ѫnгiѫpiле kopespѫnzъtoape sînt екѫале întpe еле шi екѫале кѫ челе пpeчedente.

4° Sѫma ѫnгiѫpiлop intepne de ачеашĭ парte este екѫалъ кѫ doъ dpeпte.

5° Pечiпpока fie-къpia dintp'ачеste пpoпosiцiĭ este adевъpatъ.

Dem. Fie (Fig. 30) MN, PQ челе doъ параллелe, шi RS sekanta. Пpin mіжлокѫл I ал лѫĭ AB, коборîm пе ID пepпendікѫларъ ла ѫna din параллелe; еа ва fi asemenea шi în H пе чееалалtъ паралелъ (n° 30). Челе doъ tpiѫnгiѫpĭ ADI, BHI вор fi екѫале ка dpeпtѫn-

гюрї, авînd inotenѕsa екѕалъ, fiind къ I este шіжлокѕл лѕї AB, ші ѕn ѕнгiѩ екѕал ѕнѕл алtѕia, fiind къ ѕнгюріле în I sînt опѕѕе ла вîрf.

Din потрівіреа ачестор doъ tріѕнгюрї, резѕлtъ потрівіреа ѕнгюрілор лор în A ші în B; ачестеа sînt алтерпеле intерпе аскѕціte. Алтерпеле естерпе sînt екѕале, ка опѕѕе ла вîрf. Коресnѕnzъtоареле fiind ѕнѕл intерп, чел-лалt естерп, sînt dар іаръшї екѕале. Ѕнгюріле алтерпе ші коресnѕnzъtоаре опtѕѕе sînt екѕале ка ѕѕплешенtе челор d'întîiѩ. În sfîршit, ѕѕша челор doъ ѕнгюрї intерпе $\alpha+\delta$ este екѕалъ кѕ doъ dрепtе; пепtрѕ къ $\alpha=\alpha'$ dѕпе чееа че пречеde; dар $\delta+\alpha'=$ кѕ doъ dрепtе; аша dар ші $\delta+\alpha=$ кѕ doъ dрепtе.

Inверsа tѕtѕлор пропоsіціілор ачестора este аdеvъраtъ. Къчї dака, fiind, спре ексешплѕ, ѕнгюріле алтерпе екѕале, dрепtеле MN, PQ каре fак ачесtе ѕнгюрї кѕ sекаnта, п'ар fi fost параделе, ар tребѕї, ка съ ле fачеm параделе, съ stръшѕtъш пе ѕnа dîn еле, пе MN, спре ексешплѕ, învîрtіndѕ-о îшпрежѕрѕл пѕnкtѕлѕї B. Dар аtѕnчї ѕнгюріле алтерпе пѕ вор шаї fi екѕале, пепtрѕ къ ѕнѕл din челе doъ ѕнгюрї se ва skimба; чееа че este îшпротіва пропоsіціїї dірекtе.

Королар I.

32. Прінtр'ѕn пѕnкt dat пѕшаї о параделъ пѕtеm dѕче ла о dреапtъ. Пѕtеm întребѕінца ла ачесt прінчіп раціопашепtѕл че аш dat пепtрѕ інверsа.

Королар II.

Dака sѕша ѕнгюрілор intерпе este шаї шікъ saѕ шаї шаре de кît doъ dрепtе, челе doъ лінiї se вор

întîlni. În adевър, în kasыл ачеsta, dpenteле nы sînt параleле; аша dар еле tребые sъ se întîlneaskъ.

Теоrема XX. (Апл. 24).

33. Doъ ынгіырі каре аў latыреле лор параleле, sînt еkыале. (Fig. 31).

Dem. Ка sъ dовеdim ачеasta, sъ прелынцim о laтыръ а ынsіа din челе doъ ынгіюрі, пînъ че ва întîlni о laтыръ а ынгіюлыі d'ал doiлеа. Dыпе ачеasta:

Авет $\alpha = \gamma$, ка коресnынzъtoape; dар $\beta = \gamma$, pentpы ачелашi кывînt; аша dар, $\alpha = \beta$. Аша dар, шчл.

Însemnape.

Преа віne se înцелеце къ челе doъ ынгіюрі аў deskiderea лор întoapsъ în ачелашi sens. În kasыл kontpap, лesne se пpічепе къ челе doъ ынгіюрі date sînt sыплешente ыныл алtыіа.

Теоrема XX. (bis).

34. Doъ параleле sînt pretыtindenea d'опotpівъ depъptate.

Dem. fie (Fig. 31: bis) челе doъ параleле MN PQ. Din doъ пынktыpі оаре-каре M, N, але челеі d'întîiы, sъ коворîm перпеndікыларе пе чеа d'ал doiлеа; ачеstea вор fi doъ distanце оаре-каре лыate întpe челе doъ параleле. Dыкînd diагонала PN, авеm doъ tpiынгіюрі MPN, NPQ каре sînt еkыале, pentpы къ аў о laтыръ комынъ PN копрinsъ întpe doъ ынгіюрі еkыале ыныл алtыіа ка алtерne interne. Аша dар MP=NQ. Аша dар, шчл.

Теоrема XXI.

(34 bis). Doъ dpeпte параλеλе λа о а tpeia sînt параλеλе întpe еλе.

Dem. Fie MN (Fig. 32) параλеλъ λа doъ dpeпte PQ, RS. De вош apdiкa пе AC перпепdiкъλаръ пе MN, еа ва fi перпепdiкъλаръ λа amîndoъ ачеste параλеλе (*n*° 30). Аша dap віче вepsa ші ачеstea вор fi перпепdiкъλаре λа о ачееаші dpeaпtъ. Аша dap (*n*° 28) еλе вор fi параλеλе întpe еλе.

---

§ II. ЛINIЛЕ DPEПTE SOKOTITE ÎN ЧЕРК.

Definiції (Апλ. 25).

35. De пе вош рапорtа λа чееа че s'a zis (*n*° 7) despre џeпepaџiea ъпгюріλор, поï вош бъга de seaшъ къ кît λiniea mobiλъ se пλimбъ шъtъpînd spaџiъλ împрежъръλ пъпкtъλъї O, fie-каре din пъпкtъpiλe ачеsteї λiniї шобiλе, пъпкtъλ P spре eksemпλъ, ръmîne tot d'аъnа d'о потрівъ depъptat de пъпкtъλ O, ші deskpie о λinie кърбъ. Ачеastъ кърбъ se пъmeште чіркопfepinџъ (Fig. 2). Чіркопfepinџа se definеазъ о λinie кърбъ înкisъ, аλе кърiia toate пъпкtъpiλe sînt d'о потрівъ depъptate de ъп пъпкt intеpп че se пъmeште чепtpъ.

Toate λiniiλе дъse din чепtpъλ λа чіркопfepinџъ se пъmesк paze. Лiniiλе каре trек прiп чепtpъ ші se tepminъ λа чіркопfepinџъ sînt diametpe. Toate pazeλе sînt екъаλе. Пpекъm ші diametpeλе, пeп-tpъ къ sînt paze îndoite.

Nъmim черк spaџiъλ копpins înъъпtpъλ чіркопfe-pinџеї. Ачеste doъ zічерї se iaъ a desea ъпа în λо-

кꙋл алтеїа; însъ noĭ îndemnъm пе чititop a se aпъра кît se ва пꙋtea de ачеаsta.

О порціе de чірконferінцъ, прекꙋm este KIG, se нꙋmеште арк; аркꙋл este sꙋвtîntins de коарda KG.

Nꙋmim sегment, порціеа sꙋпрafeцiĭ черкꙋлꙋĭ че este копрinsъ între эрк шi коаrdъ. Ѕекторꙋл este spaціꙋл копрins între ꙋн арк шi doъ razе; astfeл este CDO.

Ꙋнгїꙋ înskpis este ачела каре аре вîрfꙋл sъꙋ пе чірконferінцъ, шi каре este format de doъ коарde. Astfeл este ꙋнгїꙋл G.

О figꙋръ este înskpisъ în черк кînd ea îшĭ аре toate вîрfꙋріле пе чірконferінцъ. În казꙋл ачеsta черкꙋл este чірконskpis ла figꙋръ.

Ор-че dpеаптъ petpече черкꙋл este sekантъ.

О dpеаптъ este tанцентъ ла чірконferінцъ, кînd ea аре нꙋmаĭ ꙋн пꙋнкт комꙋн кꙋ чірконferінца. Am esплікат maĭ sꙋs кꙋm ачest пꙋнкт este ꙋн element ал кꙋрбеĭ, а кърiiа tанцентъ este прелꙋнціреа.

În sfîршit, о figꙋръ se нꙋmеште чірконskpisъ ла черк, кînd toate латꙋреле sале sînt tанцente ла чірконferінцъ.

Теорема XXII.

36. Ор-че diametpꙋ îmпарte черкꙋл шi чірконferінца în doъ пърцĭ екꙋале.

Dem. Fie (Fig. 33) diametpꙋл MN. De вом întoарче împrежꙋрꙋл ачеstꙋĭ diametpꙋ о парte din челе doъ але черкꙋлꙋĭ ка sъ о рабатem пе чееа-лалтъ, amîndoъ пърціле чірконferінцеĭ se вор kotpoпі негрешіt; къчĭ алт-feл am fi авꙋt пꙋнктꙋрĭ неекꙋале depъртate de чentpꙋ. Аша dap, шчл.

TEOREMA XXIII.

37. Op-че коарdъ este maĭ mikъ de kît diametpъл.

Dem. Fie (Fig. 33) o коарdъ GK. Sъ dsчem челе doъ paze CG, CK. Латspa GK este maĭ шikъ de kît ssma челор-лалte doъ. Dap doъ paze fak sn diametps. Аша dap, шчл.

TEOREMA XXIV.

38. Op-че dpeantъ noate sъ tae чipkonfepinца nsmaĭ în doъ nsnktspĭ.

Dem. Пentps къ daka ap tъia-o în tpeĭ, am aвea din чentps ла ачeste tpeĭ nsnktspĭ tpeĭ dpente eksале, nentps къ ачestea ap fi tpeĭ paze. Dap, (n^{o} 23 Кор.) ns nstem dsчe dintp'sn nsnkt ла o dpeantъ tpeĭ dpente eksале. Аша dap, шчл.

TEOREMA XXV.

39. În ачелашĭ чepk, saŭ în чepkspĭ eksале, apkspiле eksале sînt ssбt-întinse de koapde eksале, шi viче vepsa.

Dem. Fie întp'sn ачелашĭ чepk (Fig. 33) doъ apkspĭ eksале GK, DO. Zik къ koapdeле лор вор fi eksале. Întp'adeвър, pin nsnktsл M, miжлоksл apksлsĭ intepmediap OG, sъ dsчem sn diametps MN, шi sъ paбatem semiчepksл MKN пe чел eksал ks dînssл MDN. Пsnktsл G ва къdea пe O, nentps къ M este miжлоksл лsĭ OG; nsnktsл K ва къdea în D, nentps къ MGK = MOD dsnъ inotes. Аша dap челе doъ koapde вор aвea ачелеашĭ estpemitъцĭ шi se вор koтpoпi. Аша dap еле sînt eksале.

Viче vepsa, daka doъ koapde GK, DO sînt eksa-

ле, аркѕріле лор вор fi екѕале. Întр'аdевър, de вom dѕче pazеле CG, CK, CO, CD, tріѕнгюріле GCK, OCD вор fi екѕале ка ѕнеле че аѕ̆ кîte tреле latѕре екѕале. Аша dар ѕнгюріле лор în C вор fi екѕале: аша dар, de вom репеta рабаtереа пре-чеdentъ, în каре челе doъ раze CG, CO se kotpo-nesk, ѕнгюріле CGK, OCK se вор kotponi ші еле: аша dар пѕнкtѕріле G, K se вор kotponi респектів кѕ пѕнкtѕріле O, D: аша dар аркѕріле sѕбt-întinse sînt екѕале.

Însemnаре. De am fi авѕt doъ черкѕрі̆ екѕале, ле аm fi pedѕs ла ѕнѕл прін sѕпрапѕнере, ші аtѕнчі̆ вom ажѕнџе ла kasѕл întîiѕ̆.

Теоrема XXVI.

40. Întр'ачелаш черк, saѕ̆ în черкѕрі̆ екѕале, ла ѕн арк maĭ mаре коресnѕnde о коардъ maĭ mаре, ші віче верsа.

Dem. Fie (Fig. 34) аркѕл AB>MN. Пѕtem лѕа пе AB ѕн арк AD = MN; ші ръmîne sъ компаръm нѕmaĭ коарda AD кѕ коарda AB. Dѕкînd dар pazеле CA, CB, CD, авеm doъ tріѕнгюрі̆ ACD, ACB каре аѕ̆ latѕреле екѕале ѕна altеia ка раze; dар ѕнгюл ACB fiind maĭ mаре прін konstрѕкціе de kît ѕнгюл ACD, ѕрmeazъ dintр'ачеasta (n° 17) къ latѕра опѕsъ челѕі̆ d'întîiѕ̆ este maĭ mаре de kît latѕра опѕsъ челѕі̆ d'ал doiлеа; чееа че tребѕia sъ demonstръm.

Inверsа se ва întemeia tot прін раціонаmentѕл de ла n° 17.

Теокема XXVII. (Апл. 26, 27).

41. **Раzа перпеndікsларъ пе коарdъ, імпарtе ачеаstъ коарdъ ші аркsл ssбtіntins în doъ пърцї еквале** (Fig. 35).

Dem. Sъ dsчеm pazеле CA, CB: ачеstea sînt doъ обліче екsале: аша dар еле sînt d'o notpівъ deпърtate de пічїорsл перпеndікsлареї: аша dар *m*A=*m*B, аша dар 1° . . . . , шчл.

2° Пsнкtsл D, ка sн пsнкt ал перпеndікsлареї арdікаtъ în mіжлокsл лsї AB, este d'o потрівъ deпърtatъ de челе doъ estpemitъцї: аша dар DA=DB. Dар ла коарde екsале коресnsnd аркsрї екsале: аша dар пsнкtsл D este mіжлокsл аркsлsї ADB. Аша dар, шчл.

Королар.

42. **Dака în mіжлокsл коарdеї AB вom арdіка о перпеndікsларъ, еа ва tрече прin чеntрs.** În adевър, fiind къ прintр'sн пsнкt *m* нsмаї о перпеndікsларъ пsteш dsче ла AB, ші пеntрs къ C*m* este перпеndікsларъ, ор-че алtъ перпеndікsларъ se ва konfsnda кs C*m*, ші ва tрече прin чеntрsл C. Аша dар, шчл.

43. Ачеаstъ пропрietate не dъ mіжлок de а гъsi чеntрsл sнsї черк saš ал sнsї арк dat (Fig. 36). Лsînd tреї пsнкtsрї пе ачеst арк, вom авеа doъ коарde în mіжлокsл кърора вom арdіка перпеndікsларе. Ші fiind къ еле tребsе sъ tреакъ прin чеntрs, intepsекцiea лор ва deterшina ачеst пsнкt. Ачеаstъ пропрietate sлsжеште de бas tеоремеї sрmътоаре.

Теокема XXVIII. (Апл. 28).

44. **Прin tреї пsнкtsрї date, нs în лі-**

nie dreaптъ, пvтem tot d'avna face sъ treакъ о чiркonferiнцъ, dap пvmaĭ vna (Fig. 37).

Dem. Fie чеxe treĭ пvнktvrĭ date A, B, C. Sъ xe vnim prin xiniĭ drepte, în mixxokvx кърora sъ ardiкъm nepneндiкvxapexe mO, nO; zicem d'o кam datъ къ aveste nepnendiкvxape se вop întîxni; пentrv къ de вom dvче sekanta mn, vnгivpixe interne fiind îmвedepat пърцĭ de vnгivpĭ drepte, svma xop вa fi maĭ miкъ de kît doъ drepte: awa dap чеxe doъ nepnendiкvxape nv вop fi пapaxexe; awa dap exe se вop întîxni.

Fie O пvнktvx de întîxnipe: чеxe treĭ drepte OA, OB, OC sînt ekvaxe, пentrv къ OA = OB, ka d'o пotrivъ depъrtate de пiчiopvx m ax nepnendiкvxapeĭ; OC = OB пentrv achexawĭ кvвînt: awa dap aveste treĭ drepte sînt ekvaxe.

Awa dap o чiрконferiнцъ deskrisъ din пvнktvx O ka чentrv, wi кv OA ka pazъ, вa treче prin пvнk-tvrixe B, C. Awa dap, шчл. Se вede къ чеxe treĭ пvнktvrĭ date determinъ tot d'avna doъ koapde axe чiрконferiнцеĭ че вoim sъ deskrim.

Ax doixea, daka o axtъ чiрконferiнцъ ap fi пvtvt treче prin чеxe treĭ пvнktvrĭ date, ap trevvi ka sъ'ĭ determinъm чentrvx, sъ ardiкъm nepneндiкvxape пe чеxe doъ xiniĭ AB, BC. Fiind къ avest чentrv treвve sъ fie d'o пotrivъ depъrtat de aveste treĭ пvнk-tvrĭ, treвve sъ se afxe пe nepneндiкvxapexe ardiкate în mixxokvx drepteхор кape xe vnesk kîte doъ doъ. Se вede къ atvnчĭ вom afxa пentrv aceastъ a doa чiрконferiнцъ achex чentrv wi achea pazъ; awa dap ea вa fi acheawĭ чiрконferiнцъ.

Însemnape.

Dака челе tpeї пѫнкtѫpї date ap fi fost în лinie dpeaпtъ, челе doъ пepпendiкѫлape нѫ s'ap întîлni, пentpѫ къ еле ap fi паpaлеле. Se ziче atѫнчї къ чentpѫл чepкѫлѫї este ла пemъpџinit.

Teorema XXIX. (Апл. 29).

45. Op-че пepпendiкѫлapъ dѫsъ ла estpemitatea ѫнеї paze este tanџentъ ла чipкofepinџa sa (Fig. 38).

Dem. Fie paza OP, шi пepпendiкѫлapa PT; ea ape пѫнкtѫл P пе чipкonfepinџъ, dap нѫ maї ape шi алtѫл; пentpѫ къ ѫn алt пѫнкt d'алё еї оаpe-кapе, I спpe екsemплѫ, este maї depъptat de чentpѫ de кît пѫнкtѫл P, обліка OI fiind maї лѫнгъ de кît пepпendiкѫлapa OP. Аша dap пѫнкtѫл I este afapъ din чipкonfepinџъ; аша dap, шчл.

Dap пpin пѫнкtѫл P нѫmaї o tanџentъ пѫtem dѫче. Пentpѫ къ de s'ap fi maї пѫtѫt dѫче шi алta кapе нѫ s'ap кotponi кѫ PT, еа н'ap fi пepпendiкѫлapъ ла paza OP. Ачеаsta ap fi dap o облікъ în papopt кѫ tanџenta чеа ноъ, аsѫпpa къpiia am fi пѫtѫt кобоpî o пepпendiкѫлapъ, кape ap fi maї mікъ de кît OP. Аша dap ачеаstъ пpetinsъ tanџentъ intpъ în чepк.

Însemnape.

46. Este лesne de înџелes къ ачеаstъ teopemъ нѫ кontpaziче чеea че am zis maї sѫs de tanџente, кonsidepate ка елеmentеле пpелѫнџite але чipкonfepinџеї. Este destѫл пentpѫ ачеаsta ка пѫнкtѫл de tanџenџъ sъ se поаtъ кonsidepa ка aвind o лѫнџime

реалъ, кѕ toate къ nemърцinit mikъ; чеea se поate негрешit.

Теоrema XXX.

47. **Intр'ачелашĭ черк, чеа maĭ skѕрtъ dintpe doъ koapde este чеа maĭ deпърtatъ de чentpѕ. (Fig. 39).**

Dem. Fie GH koapda чеа maĭ mape, шi sъ sѕпѕnem пе чеа maĭ mikъ tpansnoptatъ în GK; ea se ва isпръвi de desѕбtѕл лѕĭ GH ка kopespѕnzъtoape ла ѕп арк maĭ mik. Fie OA шi OI перпеndikѕлареле каре mъsoаръ distanцеле. Авеm OA maĭ mikъ de kît облiка OB: аша dap кѕ atît maĭ mѕлt maĭ mikъ de kît OI. Аша dap, шчл.

Теоrema XXXI.

48. **Doъ паралеле koпpind пе чipkonfepinцъ аркѕpĭ екѕале (Fig. 40).**

Dem. Sъ коворîm din чentpѕ o перпеndikѕларъ пе AB; еа ва fi шi пе CD, шi ва despърцi în пърцĭ екѕале аркѕpiле sѕбt-întinse. Аша dap AH=BH шi CH=DH; аша dap AH—CH=BH—DH; аша dap AC=BD. аша dap, шчл.

Dака ѕпа din паралелеле ар fi fost tanцentъ, ар-dikînd în пѕnktѕл de kontakt R o перпеndikѕларъ, ачеasta ар fi o pazъ каре treче прin чentpѕ, шi каре, перпеndikѕларъ ла паралела AB, ар despърцi-o în doъ пърцĭ екѕале. Se веde къ аркѕл totaл копpins, ар авеа miжлокѕл sъѕ în пѕnktѕл R.

În sfîpшit, daка чеде doъ паралеле ар fi tanцente, kompapînd пе amîndoъ ла o паралелъ komѕnъ intepmediаръ, am fi fъкѕt ачелашĭ paцionament, шi am fi ажѕns ла ачееашĭ konkidepe

Teorema XXXII.

49. Ка съ se tae doъ чipкonfepinцe, tpeбвe шi este destвл:

1°. Ка distanцa чentpвpiлop съ fie maĭ mikъ de kît sвma pazeлop.

2°. Ка paza чea maĭ mape съ fie maĭ mikъ de kît sвma чeлeĭ maĭ miчĭ шi distanцeĭ чentpвpiлop (Fig. 41).

Kînd doъ чipкonfepinцe se tae, вnind вn пвnкt de intepsekцie кв чeлe doъ чentpвpĭ, авem вn oape-кape tpinвгiв AOC; кa чeлe doъ чepквpĭ съ se tae, este neчesap шi de ажвns кa съ se faкъ tpiвnгiвл. Dap кa съ se поatъ faчe tpiвnгiвл, tpeбвesk вpmъtoapeлe tpeĭ kondiцiĭ, adiкъ кa fie-кape dintp'aчeste tpeĭ лatвpe съ fie maĭ mikъ de kît sвma чeлop-лaлte doъ. Ашa, 1° tpeбвe съ авem пe OC maĭ mik de kît OA+CA; aчeasta este чea d'întîiв din kondiцiiлe apъtate în postвл teopemeĭ; 2° авem OA maĭ mikъ de kît OC+AC; aчeasta este a doa kondiцie; 3° tpeбвe съ авem AC maĭ mik de kît AO+CO; dap aчeastъ din вpmъ kondiцie este netpeбвinчĭoasъ, пentpв къ AC este чea maĭ mikъ pazъ, шi înкъ maĭ mikъ шi de kît AO; чeea чe pedвчe toate kondiцiiлe intepsekцieĭ лa чeлe doъ kondiцiĭ apъtate.

Teorema XXXIII.

50. Ка doъ чipкonfepinцe съ se atinгъ пe din afapъ, saв пe d'înъвntpв, tpeбвe шi este destвл кa distanцa чentpвpiлop съ fie eквaлъ кв sвma saв кв difepinцa pazeлop (Fig. 42).

Dem. Пънктъл de контакт ші амîndoъ чentpъріле тpeбъe съ fie пe o лinie dpeaптъ, къчї, de ap fi афаръ de distanца чentpъpiлop, s'ap maї афла înкъ ън пънкт комън ал чірконферінцелор de чеалалтъ парте a лiнiї ші în ачеeaшї distanцъ, adiкъ чepкъріле s'ap тъіа; dap пentpъ къ пънктъл se афлъ пe distanца чentpъpiлop, ачеasтъ distanцъ este еквалъ къ съма раzелор, кînd чірконферінцеле se atinг пе din афаръ, ші еквалъ къ diферінца лор, кînd se atinг пе d'înъъntpъ.

Теорема XXXIV.

51. Kînd doъ чepкъpї se тae, dpeaпта каре ъnеште пънктъріле de інтерсекціе este перпеndiкъларъ пе лiniea чentpъpiлop, ші se desпарте de ачеаsta în пърцї еквале. (Fig. 41).

Dem. Лiniea AB este o коардъ комънъ ла челе doъ чepкъpї; de вом арdiка în міжлокъл еї о перпеndiкъларъ, еа ва тpeче пpin амîndoъ чentpъріле (34). Аша dap лiniea чentpъpiлop este кеар перпеndiкълара арdiкатъ în міжлокъл dpeптеї AB. Аша dap, шчл.

§ III. ȢNГIȢPIЛE ШI MЪSȢPA ЛОР.

Теореme релаtiве ла ȣnгiȣрi.

Teorema XXXV.

52. În черкȣрї екȣале, saȣ̆ întр'ачелашї черк, ȣnгiȣрiле екȣале din чеnтрȣ, коnpind аркȣрї екȣале шi віче верsa.

Dem. În adeвър, dака вom dȣче коарdеле, вom авеа tpiȣnгiȣрї екȣале, ка ȣnеле че аȣ̆ ȣn ачелашї ȣnгiȣ̆ npin inotes, коnpins întpe латȣре екȣале ȣna алteia, ка pазе. Аша dар латȣреле челе d'ал tpeiлеа каре sînt коарdеле, sînt екȣале. Аша dар аркȣрiле че еле sȣбtîntind sînt шi еле екȣале.

Віче верsa, dака аркȣрiле sînt екȣале, коарdеле sînt asemenea екȣале; nentpȣ къ еле фак кȣ pазеле tpiȣnгiȣрї каре аȣ̆ кîte tpeле латȣре екȣале ȣna алteia. Din notpiвipea ачестор tpiȣnгiȣрї резȣлтъ nотpiвipea ȣnгiȣрiлор ла чеnтрȣ.

Teorema XXXVI.

53. Ȣn ȣnгiȣ̆ înskpis este екȣал кȣ жȣмътаtea ȣnгiȣлȣї ла чеnтрȣ, каре коnpinde ачелашї арк. (Fig. 43).

Dem. Fie ȣnгiȣл înskpis ASB; npin чеnтрȣл C съ dȣчем CG паралелъ лȣї SA: съ dȣчем pазеле CA, CB, шi diametpȣл SD. Авеm SAC=ACG ка алteрnе inteрnе, шi ASC=GCD ка кореsnȣnzъ toаре. Dар ASC=SAC, tpiȣnгiȣл ACS fiind isos-

чел, ка fъкѕt de doъ paze; аша dap ACG=GCD; аша dap ASC este жѕmъtatea ѕnгiѕлѕї ла чentpѕ ACD. Bom demonstpa, tot кѕ кіпѕл ачesta, къ BSC este жѕmъtatea лѕї BCD. Аша dap ѕnгiѕл toтал însкpis ASB este жѕmъtatea ѕnгiѕлѕї totaл ACB; аша dap шчл.

Daка чentpѕл чepкѕлѕї ap fi fost afapъ din ѕnгiѕ, tot asemenea am demonstpa ачeastъ пponosiцie.

Королар I.

54. Ѕnгiѕл fopmat de o tanцentъ шї o коapdъ este asemenea екѕал кѕ жѕmъtatea ѕnгiѕлѕї ла чentpѕл каpe копpinde ачелашї аpк. Fig. 44).

Dem. Къчї fie GTB ачest ѕnгiѕ; sъ dѕчem diametpѕл TCD каpe sъ fie пepпendiкѕлap ла tanцentъ, шї sъ ѕnim CG. Авem DCG+GCT= кѕ doъ dpente, шї DTG+GTB= кѕ ѕn dpent. Аша dap чea d'întiїѕ sѕmъ este îndoitъ de кît чea d'aл doiлea; dap DCG este îndoit de кît DTG dѕпъ чeea че пpeчede. Pъmîne dap GCT îndoit de кît GCB; чeea че tpeбѕia sъ demonstpъm.

Королар II, (Апл. 31 bis).

Op че ѕnгiѕ însкpis, pezemat пe ѕn diametpѕ, este ѕn ѕnгiѕ dpent, пentpѕ къ atѕnчї копpinde o semiчіpкonfepinцъ; шї de'л вom îmпъpцi în doъ пъpцї пpintp'ѕn aлt diametpѕ, вom dobedi, ка maї sѕs, къ чeлe doъ пъpцї sînt fie-каpe жѕmъtatea a doъ ѕnгiѕpї a къpopa sѕma este e-

квалъ кв doъ dpeпte. Аша dap еа însъшї пре-цвеште вп вигїв dpeпt.

Короллар III.

Тоаte вигїврїле însкрїse întp'вп serment шї ре-zemate пе ачееашї коардъ, sînt еквале; пеntpв къ копрїпd ачелашї арк, шї sînt toate жвтъtatea вп-гївлвї ла чепtpв каре копрїпdе ачеst арк.

Însemпape.

55. Ачеst королар, împреvпъ кв чел d'întîiв, dъ soлвцїеа ачеsteї проблеme.

Aсвпра впеї dpeпte date ка коардъ, sъ deskpim вп serment de черк, ast-feл în kît toa-te вигїврїле че sînt însкрїse sъ fie еквале кв вп вигїв dat a (Fig. 45. Апл. 31, bis).

Sпре ачеаsta, пе прелвпцїреа ВН а коардеї da-te АВ, sъ фачеш вп вигїв=а. În пвпktвл В, sъ ар-dікъm пе СТ о перпепdікvларъ пехотърітъ; tot аша фачеm шї în mіжлоквл лвї АВ, шї din пвпktвл de intepseкцїе О ка чеntpв, кв СВ ка разъ, sъ deskpim о чіркопфеpiнцъ; sermentвл de d'aсвпра ва împлini черереа.

Къчї вигївл а', формat de о tanцentъ шї о коар-dъ, este еквал кв вигївл însкpis ω каре копрїпdе ачелашї арк; dap $a=a'$; аша dap $\omega=a$. Аша dap, шчл.

Ачеаsta se пвмеште а deskpi пе о коардъ datъ вп serment капабіл de вп вигїв dat.

Teorema XXXVII.

56. Într'ачелашї черк, saŭ în черкѕрї еквале, аркѕріле se aŭ tot d'аѕna întpe еле în ачелашї рапорt кѕ ѕнгіѕріле ла чеntpѕ че ле копрind. (Fig. 46).

Dem. Sъ sѕпѕnem d'о кат datъ къ ѕнгіюріле s'ар авеа întpe еле ка доъ нѕмере întpeцї, :: 5 : 3, sпре екsemплѕ; ачеasta ва sъ zікъ къ ѕнѕл копрinde треї пърцї еквале de челе чінчї че ле копрinde чел-лалt. Ачеasta fiind ast-фел, sъ не înкіпѕim ачеste доъ ѕнгіюрї îmпърцite, ѕнѕл în 5, чел-лалt in 3 пърцї еквале: ва резѕлta пеntpѕ чел d'întîiѕ 5 аркѕрї еквале, шi пеntpѕ чел d'ал doiлea 3 аркѕрї еквале кѕ челе пречеdente. Аша dap аркѕріле копрinse se вор îmпърцї, ѕнѕл în 5 аркѕрї de ачелеа каре чел-лалt ва копрinde 3; аша dap se aŭ întpe еле :: 5 : 3; аша dap, шчл.

Dака челе доъ ѕнгіюрї нѕ sînt întpe еле ка доъ нѕмере întpeцї, чі ѕнѕл fiind îmпърцit în пърцї еквале, чел-лалt ва копрinde ѕн нѕмър фракціонар dintр'ачеste пърцї, аркѕріле se вор авеа întpe еле tot ка ѕнгіюріле; пеntpѕ къ пѕtem редѕче чеї доï термені аї рапорtѕлѕї in фракціï de ачелашї нѕmitор, шi фракціiле fiind atѕнчї întpe еле ка нѕмъръtоріi лор, ѕнгіюріле se вор авеа dap întpe еле ка челе доъ нѕмере întpeцї: чеea че ажѕнце ла казѕл пречеdent.

Аша dap рапорtѕл а доъ ѕнгіюрї ла чеntpѕ fiind sѕпрimat прin доъ нѕмере, întpeцї saŭ фракціï, аркѕріле копрinse sînt tot în ачелашї рапорt.

Речіпрока se ва demonstpa пріn ачелашї раціо-nament.

Sколіе.

57. Dака ѕпгїюріле sînt nекomensѕpaвіле, шi аркѕріле вор fi asemenea: къчї de n'ap fi fost аркѕріле ast-feл, s'ap fi авѕt întpe еле ка доъ пѕmере întpeці saѕ̆ fракціonape; аша dap, dѕпъ речіпрокъ, ѕпгїюріле s'ap авеа în ачелашї рапорt: чееа че este împotiва іпоtesѕлѕї.

Kînd доъ ѕпгїюрї sînt nекomensѕравіле, nѕ пѕtem zічe рігѕроs къ аркѕріле лор sînt în ачелашї рапорt. Кънї nѕ este рапорt, кînd nѕ este ѕn пѕmър пѕtінчїos каре съ'ї fie espresiea; аша dap ѕn ast-feл de пѕmър nѕ eksistъ în каsѕл nекomensѕравілелор, пеntpѕ къ ѕnimea este елеmentѕл esenціал а орї-кърѕіа пѕmър, шi în челе nекomensѕравіле, dѕпъ іпоtes, nѕ este ѕnime каре съ поаtъ slѕжi de комѕпъ mъsѕpъ.

58. Кѕ toate ачestea пропоsiціеа че am demonstpat se поаte întinde шi ла каsѕл nекomensѕравілелор пріn о апроксimaціе nехоtърîtъ; adікъ sѕвstitѕind în локѕл ѕпѕїа din челе доъ ѕпгїюрї nекomensѕравіле о кътime каре съ se deosiвeaskъ de dînsѕл, кît de пѕціn вom воі, рапорtѕл аркѕрілор ва ажѕnце рігѕроs екѕал кѕ ал ѕпгїюрілор.

Кънї съ sѕпѕnem къ împърцim ѕпѕл din челе доъ ѕпгїюрї date întp'ѕn преа mape пѕmър de пърцї екѕале, кît de miчї вom воі; ѕпгїѕл чел-лалt ва копрinde кîte-ва пърtічеле de ачestea, maї mѕлt о рътъшіцъ каре ва fi maї mікъ de кît о пърtічікъ de ачestea. Съ лепъdъш ачeastъ рътъшіцъ;

în datъ, ачeste doъ ꙋнгюрĭ se вор авеа între еле ка доъ пꙋтерэ întреџĭ, шi прin ꙋрмаре аркꙋрiле че еле копрind se вор авеа între еле ка ачeste ꙋнгюрĭ. Dар кътimea лепъdatъ поate fi кît de mikъ вom voi, шi maĭ mikъ de kît ор-че кътime datъ.

Теорiеа мъsꙋрiĭ ꙋнгюрiлор (Апл. 32—47).

59. А мъsꙋра о кътime оаре-каре, ва sъ zikъ а къꙋta de kîte орĭ еа копрinde о кътime кꙋnoskꙋtъ de ачелашĭ fел лꙋatъ dрепt ꙋnimе. Nꙋмърꙋл aflat este мъsꙋра ачesteĭ кътimĭ.

Мъsꙋрът лꙋнџimiле алътꙋрîndꙋ-ле о лꙋнџime кꙋnoskꙋtъ, metрꙋл sпре ексемплꙋ. Nꙋмърꙋл metрелор че вom гъsi este мъsꙋра ачesteĭ лꙋнџimĭ.

Sꙋпраfеџеле se мъsор прin компараџie кꙋ о sꙋпраfаџъ кꙋnoskꙋтъ; zічem къ о џарinъ este de 20 погоane; аічĭ погонꙋл este ꙋnimea sꙋпраfеџеĭ.

Волꙋminiле se мъsор прin нꙋмърꙋл de kîte орĭ еле копрind ꙋn волꙋmin кꙋnoskꙋt. Zічem къ ꙋn ваs este de 40 de ока.

Asemenea, ꙋнгюрiле нꙋ se пot мъsꙋра de kît прin компараџiеа лор кꙋ о кътime de ачелашĭ fел, adiкъ кꙋ ꙋn ꙋнгю de о мърime кꙋnoskꙋтъ, шi лꙋat dрепt ꙋnitate. Мъsꙋра dар а ꙋнꙋĭ ꙋнгю ва fi нꙋмърꙋл de kîte орĭ ꙋnitatea ꙋнгюларъ se ва копрinde întр'însꙋл. Se înџелеџе къ ачeastъ мъsꙋръ поate fi întреагъ saꙋ̆ fракџiонаръ. În практiкъ întimпinъm maĭ tot d'aꙋna fракџiĭ.

60. S'aꙋ̆ îmвoit а лꙋа dрепt ꙋnitate а мъsꙋрiĭ

ѫнгюларе ѫнгюл каре se афлъ копрins de 90 de орĭ în ѫнгюл dрепt. Ѫнгюл dрепt fiind о кътime statорnікъ шi determinatъ, asemenéa este determinatъ шi а 90-леа парte а sа. Ачеаstъ ѫnitate ѫнгюларъ а лѫаt нѫмеле de г р а d.

Ѫn ѫнгiѫ de 48 граde (каре se skрie asfел 48°) este ѫн ѫнгiѫ каре копрinde 48 пърцĭ екѫале din ачелеа de каре ѫнгюл dрепt копрinde 90.

Ѕѫма tѫtѫлор ѫнгюрiлор din прежѫрѫл ѫнѫĭ пѫнкt dat пе ѫн план, fiind екѫалъ кѫ 4 ѫнгюрĭ dрепtе, ва fi dар de 90°×4=360°.

Граdѫл ѫнгюлар se împарte în 60 de пърцĭ екѫале каре se нѫmesк m i н ѫ t е; minѫtѫл în 60 de s е к ѫ н d е; sекѫndѫл în 60 t р е е р s е, шi аша maĭ înколо. Dар în праkтiкъ нѫ прецѫim nічĭ о datъ maĭ înколо de sекѫнde. Ачеstea sînt semнеле deosебite-лор ачеstор sѫбt-împърцiрĭ. Ѫн ѫнгiѫ de 25 граde, 38 minѫte, 44 sекѫнde, 7 а zечеа, se skрiѫ

25° 38′ 44″,7.

61. Мъѕѫра арчелор шi а чiрконferinцеĭ каре se наште, dѫпъ кѫм аm възѫt, din miшкареа ѫнгюларъ, se sокоteште întр'ѫн кiп кѫ totѫл asemenea. Съ не înкiнѫim доъ dрепtе тъindѫ-se în ѫнгюрĭ dрепtе, шi къ din пѫнкtѫл лор de intерsекцiе ка чentрѫ deskрiѫ о чiрконferinцъ оаре-каре. Челе патрѫ ѫнгiѫрĭ dрепtе fiiind împърцitе în 360 de пърцĭ екѫале, este înвеdерат къ чiрконferinца ва fi asemenea împърцitъ în 360 de арче екѫале, dintре каре fie-каре se ва копрinde de ѫн ѫнгiѫ-граd. Арkѫл копрins de ѫн ѫнгiѫ dрепt ва копрinde 90 арче

еквале, прекꙋm кеар ꙋпгюл копрinde 90 ꙋпгюрї, шi in џенерал ꙋn ꙋпгю оаре-каре de 64°, sпре екsемплꙋ, ва коresпꙋnde ꙋnꙋї арк копрinzъtор de 64 аркꙋлеџе еквале.

Ачеste аркꙋлеџе аꙋ лꙋаt шi еле nꙋмеле de граde, шi nꙋ resꙋлtъ nічї о inкꙋркъtꙋръ din ачеastъ omonimie, din прічіна кореланції ꙋпгюрiлор шi арчелор de ꙋn ачелашї nꙋmър de граde. Resꙋлtъ inкъ d'ачі къ чіtіреа прецꙋлꙋї ꙋnꙋї арк dъ indatъ прецꙋл ꙋпгюлꙋї insemnat saꙋ neinsemnat че'ї коresпꙋnde, шi віче верsа; кꙋ ачеst inцелеs zічем къ ꙋ n ꙋ п г ю а р е п е n t р ꙋ т ъ s ꙋ р ъ а р к ꙋ л к о п р i n s i n t р е л а t ꙋ р е л е л ꙋ ї. Insъ instрꙋmentеле кꙋ каре мъsꙋрът ꙋпгюріле, шi каре sint in џенерал nіште черкꙋрї solide skobite, se imпарt maї лesne in арче de kit in ꙋпгюрї; ast-feл in kit пꙋtem ziче in џенерал къ прецꙋл ꙋnꙋї ꙋпгю se чіteште пе чіркоnferінца граdatъ а instрꙋmentрꙋлꙋї, шi къ аркꙋл копрins iї este тъsꙋра.

Asemenea se inцелеџе, dꙋпъ ачеаsta, sенsꙋл ачеstꙋї post; къ ꙋпгюл inskріs аре пеntрꙋ мъsꙋръ жꙋmъtatea аркꙋлꙋї копрins intре лаtꙋреле лꙋї.

62. Imпърціреа чінконferінцеї in граde este de о dаtъ контimпоранъ, de nꙋ maї веке, кꙋ imпърціреа ꙋпгюрілор. Nꙋмърꙋл imпърцірілор mꙋлt s'аꙋ пrefъкꙋt. Чірконferінца s'а imпърціt sꙋкчеsів in 4, 8, 12, 16, 24, 36, 48 пърці еквале. Архimed о imпърці in 96; dꙋпъ ачеаsta еа se imпърці in 144; in sfirшit Пtолетеꙋ Astрономꙋл sꙋбstitꙋъ nꙋмърꙋл de 360, каре fꙋ adoптat de тоцї, шi каре se intребꙋinцеазъ шi in zіоа de azї. Кꙋвintꙋл пеntрꙋ каре s'а алеs

ачеst нѕmър este mѕлцimea împърцitорiлор че аре 360, каре даѕ прецѕрі întреці пentрѕ mѕлte пърцї întреввinцate але чірконferinцеї; аша афлъш нѕшере întреці împърцind о în 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 180 пърцї екѕале.

Ла întокmiреа sistemeї metpiче, împърцiреа черкѕлѕї s'а копрins în реформе, ші s'а sѕпѕs sistemeї zечimале. Ѕнгюл дрепt ші sfертѕл чірконferinцеї s'а компѕs de 100 de пърцї saѕ граде: градѕл копрinde 100 minѕte, minѕtѕл 100 sекѕnde; astfeл în kit deosевiтеле sѕвtimпърцiрі sînt пресentate прin deosевiтеле пepeкї de zечimале, înчеpînd de ла вірrѕлъ; аша ѕн ѕнгю de 75 de граде, 17 minѕte, 3 sекѕnde, se ва skpi

75^{g}, 1703.

фъръ нiчї ѕн акчent. În sistema ачеаsta чірконferinца este de 400 de пърцї.

În лок de a лѕа градѕл дрепt ѕnime, se întреввinцеазъ ѕне орї ѕнгюл дрепt; ші atѕнчї tot прецѕл ѕнгюлар maї mік este о frакцiе zечimалъ în каре кѕноаштеm îndatъ граделе, каре sînt челе доъ d'întiю цifре zечimале. Ѕnimea se нѕmeште atѕнчї кадран, ші ѕн ѕнгю de 28 граде, 44 minѕte, 17 sекѕnde, se ва skpie 0^{q},284417. Asemenea еспресie 1^{q},03264, însemнеазъ ѕн ѕнгю дрепt, 3 граде, 26 minѕte, 40 sекѕnde, saѕ 103^{gr}, 26 minѕte, 40 sекѕnde. Se înцелеце пentрѕ че чitim aiчї 40 ші нѕ 4.

Ачеаstъ împърцiре, кѕ toatъ прiimiреа цепеpалъ a sistemeї zечimале, este пѕцin întреввinцатъ; ші împърцiреа în 360° este înкъ întреввinцатъ це-

нераљ din прічіna instрьmentелор, ші maĭ вірtos a tабл елор tрigonometрiче каре s'aŭ фъкъt pentрв dînsa. Кътре aчеstea, авантацеле преа рестрînse але îmпърцірії zeчimале maĭ se кътпънеsк кв неnъtinцa de a se îmпърці прin обічнвiteле нвmере 3 ші 6. În sfîршit преа лesne пвtem tрече de ла вna ла алta, ші съ tрadвчем прецвл внві арк аръtat în sistema веке, întр'о цiфръ каре îл аратъ în чеа нoъ, ші віче версъ, dвпъ прiнцiпвл aчesta, къ 100 граde = 90°. Fie, спре ексемплв, вn арк de 48°, 6', 40" векї a'л skimба în граde нoъ. Вом редвче întîiв не 6', 40" saŭ пе $\frac{6}{60}+\frac{40}{3600}$, în фракції zeчimале, каре daŭ $0{,}1+0{,}01111=0{,}11111$; аша dар авем песte tot 48°,1111; съ аштернем акvm пропорціеa $90:100::48{,}1111:x$; $x=53^{gr},4568$, saŭ 53 граde, 45 minvte, 68 sekвnde. Asemenea вом afла къ $65^{gr},1702 = 58°,65318$. Aчeastъ din врmъ фракціe редвсъ în minвte ші sekвnde, dъ 39'+11",448.

63. Прецвл вnгівлвĭ dрепt fiind statoрnік, врmeazъ къ прецвл граdвлвĭ вnгівлар este o kîtime абsолвtъ. Dар нв este аша кв граdвл konsidерat ка парte a чіркonfeрінцеĭ, pentрв къ dвпъ търімеа чіркonfeрінцеĭ, аркврiле резвлtante dintр'aчeastъ îmпърціре în 360 de пърцї еквале, вор авеа лвнцimї преа вaріate. Dар, noĭ am zis къ аркврiле слвжеsк de мъсвръ вnгiврiлор; seamънъ dар dвпъ aчeasta, къ вn aчелашї вnгів поate авеа atîtea мъсврї deosебite kîte чіркonfeрінце пвtem deskріe, каре съ аїбъ pentрв чеntрв вîрфвл съв.

Dар aчeastъ гревtate піере îndatъ; ші негрешit înцелецереа чititорвлвĭ a пріченвt de maĭ nainte so-

лȣціea eĭ. Întîĭȣ, toate чірконферінцеле марĭ saȣ мічĭ копрind 360 de граdе, прекȣm еле копрind доъ жȣmъiъцĭ, трeĭ a треia, патрȣ sfeртȣрĭ. Fie-каре граd este dap маĭ маре întр'о чірконферінцъ маĭ маре, dap se копрinde tot ачел нȣмър de граde. Ал doiлеа, ȣn ачелашĭ ȣнгĭȣ, кȣ toate къ копрinzînd аркȣрĭ de deosebite лȣнцімĭ în deosebite чірконферінце, ва авea нȣмаĭ о мъsȣръ, dака diферітеле аркȣрĭ копрinse sînt о ачееашĭ фракціе а чірконферінцелор лор респектіве, шi копрind ȣn ачелашĭ нȣмър de граde. Dap, este лесне de înцелес къ ачеasta se поate негрешit; пентрȣ къ dака ȣнгĭȣл este de 24°, sпре ексемплȣ, îмпърцindȣ-л în 24 пърцĭ, вом îмпърці asemenea tot прin ачеasta în 24 de пърцĭ toate аркȣріле копрinse; шi dака вом комплекta чееа че ліпсеште ла ачесте 24° ка sъ факъ 360°, чірконферінцеле toate вор fi desпърціte tot întр'ачест кіп. Аша dap, пȣtem ziче къ ȣn ȣнгĭȣ копрinde tot d'аȣна аркȣрĭ de ȣn ачелашĭ нȣмър de граde, орĭ-каре ва fi мъріmea чірконферінцеĭ къріia фак парte ачесte аркȣрĭ; astfeл în кît ка sъ трацем întpe лаtȣреле ȣнȣĭ ȣнгĭȣ, аркȣл че требȣе sъ'ĭ sлȣжеаskъ de мъsȣръ, пȣtem deskpi о чірконферінцъ кȣ о разъ оаре-каре.

Ръмîne sъ sȣпȣнem міжлоачеле кȣ каре не sлȣжіm ка sъ мъsȣръм ȣнгĭȣріле ла практікъ. Sпре ачеasta трimitem пе чititор ла аплікаціĭ (*n*° 32) ȣнdeноĭ esплікъm întребȣінцареа челор патрȣ прінчіпале instрȣmente каре sлȣжеsk ла ачеastъ мъsȣръtoape.

§ IV. ПРОПРІЕТЪЦІ ПРІNЧІПАЛЕ АЛЕ вngiврілор ші але ліпіілор dpenteîn fігврі.

Теоrема XXXVIII. (Апл. 47).

64. În орі-че tрівnгів, свша челор tреї вnгiврї este еквалъ кв доъ вnгiврї dрепte (Fig. 47).

Dem. Прin вîрfвл S ал tрівnгівлвї, съ ne înкinвim о паралелъ ла базвл съв: vom авеа în пвnкtвл S tреї вnгiврї а кърора свmъ este еквалъ кв доъ dрепte. Dар, челе tреї вnгiврї але tрівnгівлвї sînt еквале кв челе tреї вnгiврї каре ав вîрfвл лор în S; пеntрв къ δ este комвn; $\alpha=\alpha'$ ка алtерne interne; $\beta=\beta'$ пеntрв ачелашї квvînt. Аша dар, шчл.

Короларе.

1° Кînd доъ вnгiврї але внвї tрівnгів sînt еквале кв доъ вnгiврї але алtвї tрівnгів, вnгiвріле челе d'ал tреілеа вор fi еквале.

2° Întр'вn tрівnгів nв пвtem авеа de кît nвmaї вn вnгiв dрепt; къчї, de am авеа доъ, ачесtе доъ вnгiврї, кв чел d'ал tреілеа каре nв поаtе fi nвлъ, вор fаче о свmъ maї mаре de кît доъ вnгiврї dрепte. Кв atît maї mвлt nв пвtem авеа доъ вnгiврї оntвsе.

3° Челе доъ вnгiврї аsквцitе але внвї tрівnгів dрепtвnгів прецвеsк împреvnъ вn вnгiв dрепt. Челе доъ вnгiврї че sînt în казвл ачеsta se zік комплеmenteвnвл алtвіа.

4° Ȣnгюл interп a ȣnȣĭ tpiȣnгю, adikъ чел fъkȣt de ȣna din лatȣpeлe kȣ пpeлȣnџipea вasȣлȣĭ, este eкȣaл kȣ sȣma челоp doъ ȣnгюpĭ interne o-пȣse $\alpha'+\delta'$. Пentpȣ kъ $\delta+\alpha'+\beta'=2$ dpente; dap $\omega+\beta'=2$ dpente. Аша dap $\omega=\alpha'+\delta$.

Teorema XXXIX.

65. **Sȣma tȣtȣлоp ȣnгĭȣpiлоp interne aлe ȣnȣĭ поліron este екȣaлъ kȣ de atîtea opĭ doъ ȣnгiȣpĭ dpente kîte лatȣpe sînt, maĭ пȣџin doъ** (Fig. 48).

Dem. Înчепînd din ȣnȣл din вîpfȣpiлe S, sъ dȣчем diaгonaлe лa deosевiteлe ȣnгюpĭ. Se vede kъ ajȣnџe o лatȣpъ, kȣ doъ diaгonaлe, ka sъ fakъ ȣn tpiȣnгю, afapъ de чел d'întîю SAB ші чел din ȣpmъ SKI, kape va лȣa fie-kape doъ лatȣpe aлe поліronȣ-лȣĭ. Аша dap vom avea atîtea tpiȣnгюpĭ kîte лatȣpe ape поліronȣл, maĭ пȣџin doъ. Dap ȣnгюpiлe tpiȣn-гюpiлоp nȣ sînt aлt чеva de kît ȣnгюpiлe поліronȣ-лȣĭ, ші fie-kape tpiȣnгю konpinde o sȣmъ de ȣnгюpĭ екȣaлe kȣ doъ dpente. Аша dap sȣma ȣnгюpiлоp interne aлe ȣnȣĭ поліron este екȣaлъ kȣ de atîtea opĭ doъ ȣnгюpĭ dpente kîte лatȣpe ape поліronȣл, maĭ пȣџin doъ.

Însemnape.

Aчeastъ teopemъ este adевъpatъ, atît пentpȣ по-ліroaneлe kȣ ȣnгюpĭ eшite, kît ші пentpȣ поліroa-neлe kȣ ȣnгюpĭ intpate. În aчest din ȣpmъ kas, soko-tim пentpȣ ȣnгю interп sȣплementȣл ȣnгюлȣĭ intpat α, ші kȣvîntȣл este tot чел de sȣs. (Fig. 49).

Королар. (Апл. 48).

66. Kînd полігоанеле sînt perвлate, adiкъ кînd аŭ toate вnгіюріле лор ші toate латвреле лор екваале, пвtem пріn ажвторвл ачестеї теореме, съ превзіm în градe toate вnгіюріле лор, saŭ, квm se zіче maї simплв, вnгівл полігонвлвї. Din ачеаsta dedвчеm къ вnгівл tрівnгівлвї еквілатер $= \frac{180}{3} = 60^\circ$.

Вnгівл пътраtвлвї este înвedepat 90°. Пеndaгонвл прецвеште de 5 орї, maї пвцін de доъ орї, saŭ de 3 орї доъ вnгіюрї dрепте; аша dар 6 вnгіюрї dрепте прецвesк 540°; вn вnгію прецвеште dар $\frac{540}{5} = 108^\circ$.

Афлъm asemenea пеntрв вnгівл екsагонвлвї 120°, пеntрв ал октогонвлвї 135°, аша ші челе-лалте.

Теорема XL. (Апл. 49—53).

67. În орї-че паралелограм, латвреле опвse sînt еквале. (Fig. 50).

Dem. Съ двчеm діагонала BD; еа ва фаче доъ трівnгіюрї еквале пеntрв къ аŭ о латвръ комвнъ, копрінsъ între доъ вnгіюрї еквале вnвл алтвіа, ка алтерне інтерне. Din потрівіреа трівnгіюрілор резвлтъ потрівіреа латврелор опвse.

Королар.

Аша dар паралелеле копрінse între паралеле sînt еквале.

TEOREMA XLI.

68. **Daka întp'ȣn patpȣlatȣp latȣpele oпȣse sînt екȣале, вор fi шi паралеле.** (Fig. 50).

Dem. Dȣкînd diaгonала BD, вom авеа doъ tpiȣnгюpĭ екȣале, ка авînd челе tpeĭ латȣpe але лор екȣале ȣпа алteia; аша dap ȣпгюpiле sînt екȣале. Dap еле sînt алtepne; аша dap латȣpеле каpe ле fак sînt паралеле. Аша dap, шчл.

TEOREMA XLII.

69. **Daka doъ латȣpe sînt екȣале шi паралеле, шi челе-лалtе doъ вор fi екȣале шi паралеле, шi ва pъsȣлtа ȣп паралелограm.**

Dem. În каsȣл aчesta, челе doъ tpiȣпгюpĭ sînt екȣале, ка ȣпеле че аȣ ȣп ȣпгюȣ екȣал копpins întpe doъ латȣpe екȣале ȣпа алteia. Аша dap, шчл.

TEOREMA XLIII.

70. **Челе doъ diaгonале але ȣпȣĭ паралелограm se tae întpe еле în doъ пъpцĭ екȣале** (Fig. 51).

Dem. Tpiȣпгюл OAD esle екȣал кȣ tpiȣпгюл BOG; пеntpȣ къ AD=BG, шi ȣпгюpiле алъtȣpate sînt алtepne, intepne. Аша dap AO=GO шi BO=DO; аша dap, шчл.

Însemnape.

Daka паралелограmȣл este ȣп лоzanж, diaгonалеле se вор tъia în ȣпгюȣ dpent (Fig. 52); пеntpȣ къ пȣпktȣл O fiind dȣпъ чеea че пречеdе, miжлокȣл лȣĭ

GH, tpinгюл insosчел AGH este în kasвл dела n° 21, ші ліniea AO este перпепdікsларъ пе вas.

Теоrема XLIV. Апл. (54 ші 55).

71. Латвра еksагопвлві înskpis ла черк este еквалъ кв раzа (Fig. 52 bis).

Dem. Дака еksагопвл este înskpis în черк, впгюл ла чепtрвл каре se реазътъ пе латвра sa AB, копріnde $\frac{1}{6}$ din чірkonfеріnцъ: аша dар ел прецвеште $\frac{360}{6}=60^0$; аша dар ръmîne пеntрв челе-лалtе доъ впгюрї, $180^0-60=120^0$.

Dар ачеste доъ впгюрї sînt еквале, tрівпгюл ABC fiind isosчел, din прічіna разелор AC, BC. Аша dар fie-каре din челе доъ впгюрї B, A прецвеште $\frac{120}{2}=60^0$: аша dар челе трeї впгюрї але tрівпгюлвї sînt еквале, ші пріn врmаре tрівпгюл este еквілаtерал: аша dар латвра еksагопвлві înskpis este еквал кв раzа.

Însemnаре.

Se веde къ, спре а înskpi еksагопвл în черк, este dеstвл съ пвnem раzа ка коардъ пе чірkonfеріnцъ; îmпревnînd вірfвріле kîte доъ доъ, вom авеа tрівпгюл еквілаtерал înkpis.

Теоrема XLV.

72. Ор-че поліgon регвлаt se поаte înskpi ші чірkonskpi ла чірkonfеріnцъ.

Dem. Fie DABCG (Fig. 53) вn поліgon регвлаt оаре-каре. Пріn челе трeї пвnktврї C, B, A, съ трeа-

къ о чirкonferinцъ, чееа че se поate tot d'aвna; zik къ чirкonferinца ва treче printr'вn ал patrвлеа пвнkt D. Fie O intepsekцiea челор доъ перпendiквларе MO, PO, чentrвл чirкonferinцeї че tre-че prin челе treї пвнktвrї CBA. Съ вnim пе OD шi OC. Patrвлatвrвл OPAD, îmвîrtindв-se împrежвrвл лвї PO, se ва рaвate eksakt пе patrълatвrвл OPBC; пentrв къ sînt amîndoъ dreптвnгe în P; кътre a-чestea, PB=PA prin konstrвкцie; вnгiвл A=B, шi AD=AC din natвra поліgoaneлор regвлate. Aшa dар пвнktвл D ва къdea în C. Aшa dар OD=OC. Aшa dар чirкonferinца че ва treче prin C ва tre-че шi prin D, шi prin toate челе-лалte вîrfвrї але поліgonвлвї. Aшa dар ачest поліgon поate fi înskris într'о чirкonferinцъ.

Ал doiлеа, латвреле поліgonвлвї fiind koарde ekвaле але чirкonferinцeї чirкonskrise, sînt d'о protiвъ depъrtate de чentrвл O. Aшa dар toate перпendiквлареле OM, OP, ON.... sînt ekвaле. A-шa dар, din пвнktвл O ка чentrв, пвtem deskri о чirкonferinцъ каре съ treакъ prin пічiорвл твтвлор ачestор перпendiквларе, шi ла каре поліgonвл ва fi чirкonskris.

Пentrв înskrierea шi чirкonskrierea feлвrite-лор поліgoane regвлate, вeзї аплікацiiле n°. 27, 33 bis шi 54.

§ V. ЛІNІЛЕ ПРОПОРЦІОNАЛЕ ШІ ПРОПРІЕТЪЦІЛЕ FІГȢРЕЛОР ASEMENEA.

Definiцiĭ шi прiнчiпе.

73. Nȣmim tрiȣнгюрĭ екȣiȣнте, ачелеа каре аȣ̆ ȣнгюрiле лор екȣале ȣнȣл алтȣiа; латȣреле опȣse ȣнгюрiлор екȣале se нȣmesк omолоаце. Доъ tрiȣн гюрĭ екȣiȣнте пot fi преа неекȣале în sȣпрафацъ.

Nȣmim tрiȣнгiȣрĭ asemenea, saȣ̆ maĭ în цeнерал fiгȣрĭ asemenea, пе ачелеа каре, fiind екȣiюнте аȣ̆ întр'ачееашĭ вреme латȣреле omолоаце пропорцiонале. Вom demonstра în datъ къ, în tрiȣнгюрiле екȣiюнте, пропорцiоналitatea латȣрелор este о konsекȣinцъ а пotрiвiрiĭ ȣнгюрiлор, шi вiче верsа.

Обсерваціĭ.

Noĭ вom konsidера ка кȣноsкȣte фелȣрiтеле проприетъцĭ але пропорцiiлор цеometрiче, de каре tребȣе sъ не adȣчem a minte пентрȣ къ о sъ ле аплiкъm des în teорiea че о sъ ȣрmeze.

Теорема XLVI. (Апл. 56 - 97).

74. De вom îmпърцi în пърцĭ екȣале ȣна din латȣреле AC але ȣнȣĭ tрiȣнгiȣ̆ оаре-каре ABC, шi de вom dȣче прiн пȣнктȣрiле de îmпърцiре параделе ла бas, а doа латȣръ BC se ва îmпърцi прiн ачеste параделе, în пърцĭ екȣале. (Fig. 54)

Dem. Sъ dѕчem пе *gh* паралелъ ла *dm*, ſiгѕра *mdgh* ва ſi ѕп паралелограm. Аша dap $gh = dm = dc$. Аша dap челе doъ tpiѕпгюрї *cdg*, *ghn* sînt екѕале, ка ѕпеле че аŏ о латѕръ екѕалъ копрinsъ întpe doъ ѕпгюрї екѕале ѕпѕл алtѕiа, din прічina паралелismѕлѕї латѕрелор. Аша dap $gn = cg$; asemenea вom demonstpa къ $nq = gn$, шi аша mаї înколо. Аша dap, шчл.

Теорема XLVII. (id.)

75. Ор-че паралелъ dѕsъ ла басѕл ѕпѕї tpiѕпгiŏ îmпарte латѕреле în пърцї пропорціонале; înкît авem CG : GA : : CH : BH. (Fig. 55).

Dem. Dака вom sѕпѕпе întîiŏ къ челе doъ пърцї CG, GA se аŏ întpe еле ка doъ пѕmepe întpeцї : : 5 : 3, sпре екsemплѕ, ѕпа ва копрinde чінчї пърцї екѕале de каре чеea-лалтъ ва копрinde tpeї; de вom съвîршi îmпърціpea în чінчї шi în tpeї пърцї, шi dака пріn пѕпкtѕpiле de îmпърціре вom dѕче паралеле ла бas, dѕпе teopema пречеdenтъ, CH se ва desпърці în чінчї, шi BH in tpeї пърцї екѕале. Аша dap, вom авea CH : BH : : 5 : 3 : : CG : GA. Аша dap, шчл.

Ал doiлеа, dака GC : CA : : ѕп пѕmър întper se аpе кътpe ѕп пѕmър ſракціопар, saŏ пpекѕm ѕп пѕmър ſракціопар se аpе кътpe алtѕл, atѕпчї, pedѕкînd amîndoї tepmeniї în ſракції кѕ ачелашї пѕmitop, вom авea пentpѕ рапортѕл лор рапортѕл челор doї пѕmърътopї, пріn ѕpmape рапортѕл а doъ пѕmepe întpeцї; каре ревine ла касѕл пречеdent.

Аша dар, вом авеа маї ін џенерал CG : CA : : CH : BH, ші CG : CH : : GA : BH.

Інsемнаре.

76. 1°. Dака челе доъ пърџі CG, AG sînt некоменsʊрабіле, вом întinde пропоsiџiea ла каsʊл ачеsta, пріntр'ʊн раџіонамент кʊ totʊл аsемънаt кʊ чел de ла n°. 58.

2°. Аsемеnеа вом demonstра къ авем ші пропорџіеа CG : CA : : CH : CB; de ʊnde аsемеnеа CG : CH : : CA : CB.

3°. Віче верsа, dака, dреанта GH îмпарtе латʊреле în пропорџіе, еа ва fi параленъ ла баs (Fig. 57). Пеntрʊ къ, de нʊ ва fi параленъ, fie GK паралела ла баs dʊsъ пріn пʊнкtʊл G; вом авеа dар CG : GA : : CK : BK; dар dʊне înoteз авем: CG : GA : : CH : BH. Ʊрмеазъ, din прічіна рапорtʊлʊї d'întîiʊ каре este комʊн, CK : CH : : BK : BH, пропорџіе абsʊрdъ, пеntрʊ къ CK este маї маре de кît CH, în време че BK este маї мік de кît BH. Însъ ачеаstъ пропорџіе se ва înfъџіша tot d'аʊна, кînd вом sʊпʊне пʊнкtʊл K deoсебіt de пʊнкtʊл H. Аша dар віче верsа este аdевъраtъ.

Теорема XLVIII. (id.)

77. Тріʊнгіʊріле екʊіʊнге аʊ латʊреле лор омолоаџе пропорџіонале, ші sînt аsемеnеа (Fig. 56).

Dem. Fie ABG, *abg*, челе доъ tріʊнгіʊрі. Съ пʊнем ʊнгіʊл *g* пе чел екʊал кʊ dînsʊл G, челе доъ латʊре *ga*, *gb*, вор лʊа поsiџііле Ga, Gb, ші баsʊл

aq ва лsа о посіціе паралелъ ла AB, пентрs къ sнгюл *a* este екsал лsї A.

Аша dар, dsпъ чеа d'intiїs însemнаре а теоремеї пречеdente, вом авеа... $Ga : GA :: Gb : GB$. Аша dар доъ латsре але sнsї трisнгiю фак пропорціе кs челе доъ латsре омолоаце але челsї-ладт трisнгiю.

Пsind sѕкчесів sнгюріле *a* ші *b*, пе челе екsале кs еле A, B, вом афла асеменеа челе-ладте доъ пропорції:

$$ga : GA :: ab : AB.$$
$$ab : AB :: bg : BG.$$

Кіте треле ачесте пропорції формеазъ теорема поменітъ.

ТЕОРЕМА XLIX. (id.)

78. Віче верса: доъ трisнгiюрї каре аѕ латsреле омолоаце пропорціонале, sінт екsisнге ші асеменеа. (Fig. 58).

Dem. Съ sѕпsнем къ челе доъ трisнгiюрї ABC, *abc* аѕ латsреле омолоаце пропорціонале.

De desѕбтsл басsлsї *ab*, фачем în *a* ші în *b* доъ sнгюрї респектів екsале кs A, B; dintр'ачеаста ва резsлта sн трisнгiю *abg*, екsisнгiю кs ABC, ші каре ва dа прін sрмаре пропорціеа (67):

$AB : ab :: AC : ag$...dар прін іпотес авем...$AB : ab :: AC : ac$; аша dар $ag = ac$. Асеменеа вом доведі къ $bg = bc$. Аша dар трisнгюл *abg* нs есте алт de кіт *abc*; dар чел d'інтiю есте екsisнгiю кs ABC; аша dар ші чел d'ал доілеа есте ші ел екsisнгiю: чееа че требsе съ демонстръм.

Teorema L. (id.)

79. **Доъ tpiѹнгюpĭ sînt asemenea kînd aѹ ѹн ѹнгiѹ екѹал копpins întpe латѹpe пропорціонале** (Fig. 57).

Dem. Fiind къ аѹ ѹн ѹнгюѹ екѹал, ле пѹtem пѹне ѹнѹл пeste алtѹл; dap atѹнчĭ лiniea GH, împъpцind латѹреле пропорціонале, este паралелъ ла бas. Аша dap ѹнгюpiле G шi H sînt pесnективъ екѹале кa кореспondente ѹнгюрiлор A, B; аша dap tpiѹнгюpiле sînt екѹiѹнге шi asemenea.

Teorema LI. (id.)

80. **Доъ tpiѹнгiѹpĭ каре îшĭ аѹ латѹреле перпendiкѹларе ѹна алtеĭа, sînt екѹiѹнге шi asemenea** (Fig. 59).

Dem. Fie челе tpeĭ латѹре але tpiѹнгюлѹĭ internѹ *abc* pесnектiв перпendiкѹларе пе латѹреле лѹĭ ABC, zік къ челе tpeĭ ѹнгюpĭ *a*, *b*, *c*, sînt екѹале кѹ челе tpeĭ ѹнгюpĭ A, B, C.

Пentpѹ къ în патpѹлatepѹл APaR, sѹma челор патpѹ ѹнгюpĭ прецѹesk патpѹ ѹнгюpĭ dpепte (55). Dap челе доъ ѹнгюpĭ în P шi în R sînt dpепte npin inotes; ръmîn dap доъ ѹнгюpĭ dpепte пentpѹ прецѹл челор-лалte доъ. Dap челе доъ ѹнгюpĭ *cab*, R aP прецѹesk iаръшĭ доъ dpепte; аша dap *cab*=A, пentpѹ къ fак о ачееашĭ sѹmъ кѹ ачелашĭ ѹнгюѹ RaP.

Tot кѹ кiпѹл ачеsta вom demonstpa къ *b*=B, *c*=C. Аша dap, шчл.

Însemnаре.

Тріѕгіѕл че 'л am ѕѕпѕѕ interп пѕtea fi esteрп; кѕ toate ачеstea прелѕпџіnd латѕреле tріѕпгіѕлѕї ABC, пѕtem фаче ачелашї раџionament.

Теоrема LII. (Апл. 65).

81. De вom dѕче о параделъ GH ла басѕл tріѕпгіѕлѕї ABC, ші diferitele dреп-tе CD, CK, Cn, шчл. din вîрf пе бas, ачеаstъ din ѕрмъ лiџie ші паралела sa se вор îmпърџi în пърџї пропорџionале (Fig. 60).

Dem. Тріѕпгіѕріле asemenea CGI, CAD daѕ:

GI: AD::CI: CD.

Вom авеа iар IO: DK::CI: CD, din прічіна tріѕпгіѕрілор asemenea CIO, CDK; аша dар, din прічіна рапортѕлѕї комѕп, ese CI: IO::AD: DK. Asemenea вом demonstра къ IO: Om::DK: Kn, ші аша маї înколо. Аша dар басѕл ші паралела sa se îmпарt пропорџional.

Королар.

Dака басѕл este desпърџit în пърџї еквале, ші паралела ва fi asemenea îmпърџitъ.

Теоrема LIII. (Апл. 91 ші 98).

82. Dака din вîрfѕл ѕпѕї tріѕпгіѕ вом коборî о перпendiкѕларъ пе інотеnѕѕъ, reѕѕлtъ пропрietъџiле ѕрмътоаре:

1° Тріѕпгіѕл dрепtѕпгіѕ ва fi îмпър-

цit în doъ tpiъnгiъpĭ asemenea кs tpiъnгiъл totaл, шi asemenea întpe eлe;

2° Fie-кape din чeлe doъ лatъpe aлe tpiъnгiълъĭ totaл va fi mediй пpoпopцioнaл întpe inotenssa întpearъ шi serментъл aлъtъpat;

3° Пepпendiкsлapa va fi medie пpoпopцioнaлъ întpe чeлe doъ serмente aлe inotenssei.

Dem. 1° Tpiъnгiъл ADC шi tpiъnгiъл totaл aŭ sn sнгiŭ комsн A, шi sînt amîndoъ dpeптsнгe; пpin spмape eлe sînt eкsiънгe шi asemenea. Tpiъnгiъл BDC este asemenea кs tpiъnгiъл totaл пentps aчeлaшĭ кsвînt. Aшa dap, 1° шчл.

2° Observînd кape sînt лatspeлe onsse лa sнгiъpiлe eкsaлe, aseмъnapea tpiъnгiъpiлop пapцiaлe кs tpiъnгiъл totaл ne daŭ пpoпopцiiлe.... AD : AC :: AC : AB... шi BD : BC :: BC : AB.

3° În sfîpшit, компapaцiea tpiъnгiъpiлop пapцiaлe dъ

AD : CD :: CD : DB.

Кape demonstpeazъ пpoпpietъцiлe sss nomenite.

Коpoлap.

Spмeazъ din пpoпpietatea din spмъ, къ opĭ-чe пepпendiкsлapъ apdiкatъ пe sn diametps пînъ лa o чipкonfepinцъ, este medie пpoпopцioнaлъ întpe чeлe doъ пъpцĭ aлe aчestsĭ diametps. Пentps къ de вom sni пsнкtsл C (Fig. 62) кs чeлe doъ estpemitъцĭ aлe diametpsлsĭ, вom avea sn sнгiŭ dpept în C; aшa dap sn tpiъnгiŭ dpeптsнгiŭ кape va avea diametpsл de inotensъ; чeea чe ne adsчe лa teopeмa aкtsaлъ.

Teorema LIV.

83. Dreanta CD каре împarte în doъ пърці еквале вnгівл C ал вnві tрівnгів ABC, împarte басвл în doъ пърці пропорціonале кв лаtвреле чe ле sînt алъtвра-te. (Fig. 63).

Dem. Sъ прелвnџim пе BC, шi sъ dвчem пе AG паралелъ ла CD; вom авеа (75) BD : AD : : BC : CG. Аша dap zік къ CG=AC. Пentрв къ $b=a$ ка корьsnвnzъtoape; врmeazъ ка $b=a'$, пentрв къ din коnstрвкціe $a=a'$; dap $a'=a''$ ка аlterne interne; аша dap $b=a''$; аша dap tрівnгівл CAG este isosчел; аша dap CG=AC. Аша dap, шчл.

Teorema LV.

84. Doъ коарde каре se tae întр'вn черк аў пърціле лор речіпрок пропорціonале, adікъ вom авеа AO : CO : : DO : BO (Fig. 64).

Dem. Sъ dвчem AD, BC: dintр'ачеasta ва ресвлtа doъ tрівnгівpі asemenea; къчі, 1° вnгівріле лор în O sînt еквале ка опвse ла вîрf; 2° вnгівл A = вnгівлві C, пentрв къ sînt amîndoъ înскрise шi резemate пе ачелашi арк BD. Внгівл B=D пentрв ачелашi квînt. Asemъnapea tрівnгівpілор не daў порпорціеа AO : CO : : DO : BO; чеea че tребве sъ demonstръm.

Însemnape.

Чеea че fаче ка ачеste пърці sъ fie речіпрок пропорціonале, este къ tрекînd în компараціеа пър-

цілор, de ла коардa чеа d'întîĭ ла чеа d'ал doілеа, ревеніm de ла a doa парte a aчesteia, ла a doa парte a челеĭ d'întîĭ.

Teorema LVI.

85. Daka dintp'ꙋn пꙋнкt estepn вom dꙋче doъ sекante ла ꙋn черк, sекanteле întpeцĭ вop fi pечіпрок пропорціоnале пърціlop лop estepne. (Fig. 65).

Dem. Sъ ꙋnim AD, BC; tpiꙋнгюpiле ASD, BCS вop fi asemenea, ка ꙋнеле че аꙋ ꙋn ꙋнгюꙋ komꙋn în S, ші ꙋn ꙋнгюꙋ A = B, ка конprinzînd ачелаші арк CD. Aша dap aчeste tpiꙋнгюpĭ sînt asemenea, ші латꙋреле omoлoaце daꙋ пропорціеа:

SA : SB :: SD : SC;

чеea че tpeбꙋia sъ demonstpъш.

Teorema LVII. (Апл. 100).

86. Tanцenta este medie пропорціoнaлъ întpe sекanta ші пapteа sa estepнъ. (Fig. 66).

Dem: Fie ST o tanцentъ, ші SB o sекantъ порnitъ din ачелаші пꙋнкt. Sъ ꙋnim BT, KT: вom aвеа doъ tpiꙋнгюpĭ asemenea, SBT, SKT; пentpꙋ къ аꙋ ꙋнгюл S komꙋn, ші ꙋнгюл STK, форmat de o tanцentъ ші o коардъ, este екꙋал кꙋ ꙋнгюл înskpis B, каре конprinde ачелаші арк. Латꙋреле omoлoaце daꙋ пропорціеа SK : ST :: ST : SB; чеea че tpeбꙋiea sъ demonstpъm.

Teorema LVIII.

87. Поліroaneле pегꙋлate de ꙋn ачелаші нꙋmър de латꙋpe sînt firꙋpĭ aseme-

nea, ші конtвреле лор sînt între еле ка латвреле отолоаце. (Fig. 68).

Dem. 1° Вnгїврїле sînt еквале: пentрв къ валоареа вnгївлвї вnвї полїгon регвлат fiind детермінатъ de нвтървл латврелор лвї (65), требве sъ fie ачееаші în доъ полїгоане каре аѕ fie-каре tot kîtе atîtea латвре.

2° Латвреле отолоаце sînt пропорцїонале: ачеаsta este о konsеквінцъ нечеsapie a потрївірії лор.

3° Авет AB: ab::2 AB: 2 ab::3 AB: 3 ab... ::8 AB: 8 ab, adікъ, în ценерал, прекѕт перімеtреле полїгоанелор: чееа че доведеште чеа din вртъ парте а poстірії теоретеї.

Королар.

Трївнгїврїле ABO, abo sînt asemenea, ка вnеле че аѕ ачелаші вnгїв ла чентрв, коnpins întpe латвре пропорцїонале, пentрв къ ачеste латвре sînt еквале. Аша дар авет OA: oa::AB: ab; аша дар перімеtреле полїгоанелор регвлате, каре se аѕ între еле ка латвреле отолоаце, sînt asemenea între еле ші ка лінііле AO, ao, saѕ прекѕт разеле черкврілор чірkonskрise.

Теорема LIX (Апл. 146, 171).

88. Чінконферінцеле se аѕ între еле în ачелаші рапорт кв разеле лор (Fig. 67).

Dem. Fie доъ чірконферінце, în каре sъ sвпвnет înskрise доъ полїгоане регвлате, доъ октогоане спре ексетплв. Лвкрв че tot d'авна se поате;

пentpȣ къ, de пе вот înкinȣi чiркоnferinцеле îmпърцitе în 8 пърцĭ екȣале, челе 8 коарde каре вор sȣбtintinde ачеste пърцĭ вор determina ȣнiгоане регȣлate. Îmпърцind în doъ аркȣрiле sȣбtintinse, шĭ ȣnind пȣnктȣрiле de îmпърцiре, вот авеа полiгоане регȣлate de 16 латȣре, пе каре вот skimба кȣ кiпȣл ачеsta în полiгоане de 32, 64, 128 шчл. латȣре, каре вор fi înskpise tot кȣ кiпȣл ачеsta în челе doъ чiркоnferinце.

Ачеste полiгоане se deoseбesк din че în че маĭ пȣцin de чiркоnferinцеле чiркоnskpise; шi de вот sокоti ачеаstъ операцiе прелȣнцitъ ла пешърцinit, полiгоанеле каре вор авеа atȣnчĭ ачелашĭ пȣмър пешърцinit de латȣре пешърцinit мiчĭ, кȣ toate къ пеекȣале, se вор konfȣnda кȣ чiркоnferinцеле date; шi este înвedepat, din натȣра ачестеĭ операцiĭ, къ tречереа din stареа полiгонȣлȣĭ în stареа чiркоnferinцiĭ se ва fаче de о datъ în амîndoъ figȣреле. Аша dар челе doъ чiркоnferinце sînt doъ полiгоане регȣлate asemenea.

Întр'ачеаstъ stаре а лȣкрȣрiлор, черкȣрiле date se konfȣndъ кȣ черкȣрiле чiркоnskpise ла полiгоане, шi перimetреле fiind întре еле ка раделе черкȣрiлор чiркоnskpise, ȣрmeazъ dintр'ачеаsta къ чiркоnferinцеле date se аȣ întре еле прекȣm раделе лор.

---

§ VI. ПРОБЛЕМЕ ЕЛЕМЕNТАРЕ АSЪПРА ЛІNІІЛОР.

Обsервацiе.

89. Ачеst titлъ требзе sъ копрinzъ зn пзшър destзл de mape de проблeme; dap fiind къ челе maĭ mзлte ле вom вedea ла апліkъцiĭ, aiчĭ nз ле вom nomeni. Din пзцineле че вош аръta aiчĭ, зnеле sînt проблеme кърорa tpeaзe sъ ле аръtъm konstpзкцiea цeometpiкъ maĭ 'nainte de a esnзne întpeбзinцapea лор, шi алtеле каре аŭ зn intepes оаре-каре de a teopie. Noĭ вom da nзmaĭ postipea пробleмелор ачелора че nз вom tpata aiчĭ, кз аръtapea лoкзлзĭ зnde se гъseштe soлзцiea лор. Ачеste проблеme sînt челе зpmъtoape:

1° Sъ îmпърцim o dpeanтъ datъ în пърцĭ екзале. (Апл. 10 bis);

2° Sъ dзчem o пepnendiкзларъ ла o dpeantъ, dintp'зn пзnkt dat saŭ пе ачеastъ dpeantъ, saŭ afaръ de dînsa (Апл. 18);

3° Întp'зn пзnkt dat ал зneĭ dpente, sъ facem зn зnгiŭ екзал кз зn зnгiŭ dat Апл. 30);

4° Sъ îmпърцim зn зnгiŭ saŭ зn арк dat în doъ пърцĭ екзале (Апл. 26);

5° Ilpintp'зn пзnkt dat, sъ dзчem o паралелъ ла o dpeantъ datъ (Апл. 19—23).

6° Dîndз-se doъ зnгiзpĭ але зnзĭ tpiзnгiŭ, sъ гъsim пе чел d'ал tpeiлea (Апл. 47);

7° Dîndз-se зn зnгiŭ шi латзpeле алътзpate але зnзĭ паралелограm, sъ 'л deskpim (Апл. 49);

8° Sъ гъsiш чentpвл вnвĭ черк saв ал вnвĭ арк dat (Апл. 28).

Проблеша I.

90. Dîndв-se челе tpeĭ латвpe але вnвĭ tpiвnгiв, sъ deskpim tpiвnгiвл. (Fig. 69).

Solвцie. Пвnе de о кат datъ о латвpъ оаре-каре, C spre esemплв, шĭ din aшîndoъ estpemitъцiле еĭ ка чentpвpĭ, кв doъ paze pesпektiв еквале кв A шi B, deskpie doъ аpквpĭ de черк каре sъ se tae întp'вn пвnkt O; вneшte aчest пвnkt кв amîndoъ estpemitъцiле але латвpeĭ C; tpiвnгiвл ABO че pe-sвлtъ din aчeastъ konstpвкцie ва fi tpiвnгiвл чepвt, пentpв къ челе tpeĭ латвpe вор fi înвedepat еквале кв челе tpeĭ лiniĭ date.

Провлета II.

91. Пpintp'вn пвnkt dat, sъ dвчem о tanцentъ ла о чipkonfepinцъ datъ. (Fig. 70).

Sол. Daка пвnktвл dat este пе чipkonfepinцъ, sъ dвчem paza каре se tepminъ ла aчest пвnkt: пep-пendiквлара ла pazъ ва fi tanцenta.

Daка пвnktвл dat se afлъ afapъ, în P, spre ek-semплв, sъ вnim aчest пвnkt кв чentpвл C, шi пе CP ка diametpв, sъ deskpim о чipkonfepinцъ каре ва тъia чipkonfepinцa datъ în doъ пвnktвpĭ, B, D; sъ dвчem PB, PD: еле вор fi doъ tanцente.

În adeвъp, de вom вni CD, CB, вom авеа вn-гiвpĭ înskpise ла B шi ла D. Dap еле se peazъшъ пе diametpвл CP. Аша dap еле sînt вnгiвpĭ dpepte;

аша dap лiнiiле PB, PD sînt перпендiкѕларе ла разе d'але черкѕлѕї daт; аша dap еле sînt tanџente.

Пробл. III.

92. Съ însкрim ѕн черк înтр'ѕн трiѕнгiѕ dat. (Fig. 71).

Sол. Съ îmпърџim în доъ пърџї еквале доъ din ѕнгiѕрiле трiѕнгiѕлѕї dat, шi din пѕнктѕл de iнтерсекџie съ коборîm перпендiкѕларе пе челе трeї латѕре. Ачеste трeї перпендiкѕларе вор fi еквале, шi вор fi разе d'але черкѕлѕї însкрis ал кърѕiа чентрѕ ва fi пѕнктѕл de iнтерсекџie ал челор доъ drепте каре îmпарт ѕнгiѕрiле în пърџї еквале.

Къчї трiѕнгiѕл *Apo* este еквал кѕ трiѕнгiѕл *Amo*, fiid къ sînt amîndoъ дрептѕнге, шi ѕнгiѕрiле лор în A sînt еквале, ка жѕмътаte fie-каре а ѕнѕї ачелашї ѕнгiѕ. Аша dap *op*=*om*. Asemenea вом доведi къ *on*=*om*=*op*. Аша dap челе трeї перпендiкѕларе sînt еквале Аша dap, лѕînd пѕнктѕл *o* дрепт чентрѕ, шi ѕна din еле пентрѕ разъ, вом deскрie ѕн черк каре ва fi însкрis în трiѕнгiѕ, пентрѕ къ латѕреле трiѕнгiѕлѕї вор fi перпендiкѕларе пе разеле черкѕлѕї.

Королар. Dака, în локѕл челор доъ ѕнгiѕрї B, C, am fi îmпърџit пе B, A, este înвеdерat къ am fi авѕт ачелашї черк însкрis. Ѕрmeазъ dinтр'ачеаsta къ дрептеле каре îmпарт în пърџї еквале трeї ѕнгiѕрї але ѕнѕї трiѕнгiѕ, se тае înтр'ѕн ачелашї пѕнкт.

Пробл. IV.

93. Прiнтр'ѕн пѕнкт *m* лѕаt înъѕнтрѕл

ѹнѹі ѹнгіѹ A, съ дѹчем о дреаптъ CmG, тъінд д'а кѹртеziшѹл ачест ѹнгіѹ аст-фел ка челе доъ пърці але сале mC mG, съ fie екѹале. (Fig 72).

Сол. Съ дѹчем mB паралелъ ла ѹна дін латѹ-ре; дѹпе ачеаста съ лѹім $BC=BA$; пріп челе доъ пѹнктѹрі C, m, съ дѹчем дреапта CmG: ачеаста ва fi лініеа кътатъ.

Пентрѹ къ, ін тріѹнгіѹл CGA, mB паралелъ ла басѹл тріѹнгіюлѹі, дъ (75) $Cm : mG :: CB : BA$; аша $CB=BA$. Аша дар $Cm=mG$.

Пробл. V.

94. Съ гъсім о а патра пропорціоналъ ла треі дренте дате, a, b, c (Fig. 73).

Сол. Вом фаче ѹн ѹнгіѹ оаре-каре A, ші вом лѹа $AD=a$, $DH=b$, $AG=c$; вом ѹні DG, ші пріп пѹнктѹл H вом дѹче HK паралелъ ла DG; лініеа GK ва fi а патра пропорціоналъ кътатъ (75).

Інсемнърі.

1° Ам fi пѹтѹт лѹа DH плекінд дін A, ші атѹнчі ам fi сокотіт ші GH порнінд дін A.

2° De с'ар fi фост черѹт о а треіа пропорціо-налъ, конструкціеа ар fi фост ачееаші; нѹмаі, дін натѹра черерії, ам авеа $AG=DH$.

Пробл. VI.

95. Съ гъсім о медіе пропорціона-лъ інтре доъ лініі дате (Fig. 74).

Sol. Fie AD, BD чеде doъ лiniĭ date. Пе sъma лор, ка diametpъ, sъ deskpim o semiчipkonfepinцъ, шi în пъnktъл лор de ъnipe D sъ apdikъm o пep-пendikъларъ пînъ ва întiлni кърва în G. Лъnцimea DG ва fi mediea къъtatъ. Ачeastъ pesълtъ d'a dpeп-tъл din короларъл (n° 82).

Пробл. VII.

96. Sъ îmпъpцim o dpeaптъ datъ în кîte пъpцĭ екъале вom воi, saъ în пъpцĭ пpопорцiопале къ лiniĭ date. (Bezĭ Апдi-кацiiле n° 65.)

Пробл. VIII.

95. Пе латъра datъ *ab* ка omoлoaгъ къ AB, sъ deskpiem ъn полiгon asemenea къ полiгonъл dat ABCDG (Fig. 75).

Sол. Sъ fачem ъnгюл b=B, шi sъ къъtъm o a паtpa пpопорцiопалъ întpe AB, *ab*, BC; каре ва fi *bc*. Къ кiпъл ачеsta вom detepmina пе toate чеде-ладte латъpe.

Ачeste полiгoane sînt asemenea, пentpъ къ аъ din konstpъкцie toate ъnгюpiле екъале ъпъл алтъia шi латъpеле omoлoaцe пpопорцiопале.

98. Алтъ soлъцie. Îmпъpцim полiгonъл dat în tpiъnгюpĭ пpin diaгoпале AC, AD. Пе латъра *ab* sъ fачem în *a* шi în *b* doъ ъnгюpĭ pestпektiв екъа-ле къ ъnгюpiле A, B але tpiъnгюлъĭ ABC; dobîndim аша ъn tpiъnгiъ *abc* îmвedepat екъiъnгiъ, шi пpin ъp-mape asemenea къ ABC. Asemenea вom fаче пе *ac* ъn tpiъnгiъ *acd* asemenea къ ACD, аша шi пе чеде-ладte. Чеде doъ полiгoane вор fi екъiъnгe пpin kon-

stpsкціе, ші пропорціonalitatea латsрелор se doвedeште лесne прin asemъпареа tpisнгюрілор. Аша dap, шчл.

Пробл. IX.

99. Sъ împъpцim o dpeantъ datъ în medie ші estpemъ раціе, adікъ în doъ пърці ast-fел ка чеа maї mape sъ fie medie пропорціопалъ întpe лініеа întpeагъ ші partea чеа maї mікъ.

Sол. Fie AB лініеа datъ (Fig. 76). Sъ apdікъm перпеndікsлар пе BC екsал кs жsmъtatea лsї AB; ші din пsпкtsл C, ка чепtps кs CB ка pazъ, sъ deskpim o чіркопfеріпцъ. Sъ dsчем ACD, ші sъ рабatem în AI partea estepпъ AG a sekantеї AD: лініеа AI ва fi чел maї mape serment къstat.

În adевър, AB este tanцentъ în B, ші AD este o sекantъ; аша dap вom авea (86) AD : AB : : AB : AG saš AI. Аша dap AD—AB : AB : : AB—AG : AG; dap AD—AB=AD—GD, ші AB—AG=BI; аша dap AI : AB : : BI : AI: saš în sfîpшit пsind tepmeniї estpemї în локsл mediілор, авem AB : AI : : AI : BI. Чееа че tpeбsia sъ demonstpъm.

Însemnape.

Ачеastъ проблemъ челеbpъ sъ пsmea de чеї векї sекціеа dівinъ, din прічіna msлтелор ші преа fpsmoaselор пропрієtъцї че pretindeaš къ ape. Ачestе пропріеtъцї fак ssбіеktsл sпеї кърці komпsse de sп кълsгър пsmit Лsка de ла Sf. Mopmînt, каре s'a sitat de tot din прічіna пsлitъцiї eї. Sinгsра апли-

каціе intepesantъ а ачestei проблеme este înкріереа декагонълъї регълат în черк.

ПROBLEMA X.

100. Съ înскріеm ън dекагон întр'о чіркonferinцъ datъ. (Fig. 76).

Sол. Fie CB раза чіркonferinцеї. О вом împърці în medie ші estpemъ раціе. Fie *Cm* чел mai mape serment, ачеsta ва fi латъра декагонълъї înскріс. Вом лъа пе $Bp = Cm$ пе чіркonferinцъ; ачеаstъ коардъ ва fi копрinsъ de zече орї în чіркonferinцъ.

În adeвър, de вом дъче *mp*, челе доъ тріънгюрї CB*p*, B*pm* вор fi asemenea; пентръ къ аъ ън ънгю еквал копрins între латъре пропорціонале, adікъ: ънгюл B комън, ші прin конstрвкціе $CB : Bp :: Bp : Bm$. Dap тріънгюл CB*p* este isosчел, аша дар ші B*pm* este asemenea; аша дар $pm = Bp = Cm$. Аша дар тріънгюл *Cmp* este ші ел isosчел. Аша дар ънгюл C este жъmътatea ънгюлъї estepn B*mp*; аша дар este жъmътatea ші а ънгюлъї B, ші прin ърmape înкъ ші а ънгюлъї *CpB*. Аша дар ънгюл C este $\frac{1}{5}$ din съma ачеstор din ърmъ ші а ънгюлъї C împреънъ; аша дар ел прецъеште $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$; аша дар ел este $\frac{1}{10}$ din 360°; аша дар копрinde а zечеа парте а чіркonferinцеї. Аша дар, шчл.

Ънind кіте доъ доъ латъреле декагонълъї, вом авеа пентагонъл регълат înскріs. În sfîршit, de вом înскрі декагонъл, diferinца арчелор съbtîntinse ва fi $60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$. Ачеst прец este а чinспре-zечелеа парте а чіркonferinцеї. Пътem dap кв кіпъл ачеsta съ înскріm пентадекагонъл регълат.

Калкѕлѕл пѕтерік пентрѕ коарда de 36° есте преферабілъ ла конструкціеа џеометрікъ. Ка съ'л съвіршім, вом авеа, лѕінд раза drепт ѕніме, ші пѕмінд x сегментѕл чел маї маре каре требѕе съ фіе латѕра декагонѕлѕї, $1 : x :: x : 1 - x$; de ѕnde $x^2 + x = 1$; de ѕnde

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

лѕінд пѕмаї прецѕл позітів; чееа че не dъ 0,61803 пентрѕ латѕра декагонѕлѕї. Афлъм ачелаші резѕлтат în тавла коарделор. (Апл: 33 біс).

Прін ажѕторѕл аркѕлѕї de 36°, вом афла аркѕл de 18°, dѕпе ачеста пе чел de 9°. Пентаdекагонѕл dъ аркѕріле de 24°, de 12°, de 6° ші de 3°. De вом îмпърці ачест dін ѕрмъ арк прін пінъіте în 3 пърцї еквале, чіркопферінца се ва îмпърці în граde. Тавла de коарde не поате сєрві асеменеа.



A DOA ПАРТЕ.

SȢПРАFЕЦЕ.

ПRELIMINARE.

DEFINIЦIЇ.

101. Nȣmiш fiгȣrĭ екȣivaлente пе ачелеа але кърора sȣпрafeце sînt d'o întindере екȣалъ, каре însъ din прічіна deosebirii de forшъ, нȣ se пot котропі прін sȣпрапȣнере.

Ariea ȣneĭ fiгȣrĭ este кîtimea mъsȣrabilъ a sȣпрafeцеĭ копрinse în perimetrȣл sъȣ. Zічереа *sȣпрafaцъ* esпrimъ maĭ џенерал o întindере de doъ dimensiĭ sokotite ка nedefinite.

Înълцimea ȣnȣĭ параleлограm este перпеndiкȣлара каре mъsoаръ distanцa челор doъ латȣре опȣse лȣate dрепt basȣrĭ.

Înълцimea ȣnȣĭ triȣнгiȣ este перпеndiкȣлар коборitъ dintr'ȣnȣл din virfȣrile лȣĭ пе латȣра опȣsъ лȣатъ dрепt bas.

În sfîrшit, înълцimea ȣnȣĭ trапez este перпеndiкȣлара dȣsъ între ачеste doъ латȣре параleле.

Este пrea de trebȣinцъ sъ înseшnъm къ linieа нȣmitъ *înълцime*, în deosebitele ачеste fiгȣrĭ, нȣ кade negreшit înъȣntrȣл fiгȣreĭ, кȣm ар креде чінева ла чеа d'întîiȣ привire. Ка перпеndiкȣлара sъ se поатъ dȣче dȣпе definiцie, trebȣe adesea sъ прелȣнџim латȣреле fiгȣреĭ; чееа че se întîmплъ, sпре eксемплȣ, кînd ȣn triȣнгiȣ аре ла basȣл sъȣ ȣn ȣнгiȣ

оптѕ. Аша înълцішеа параделограмѕлѕї ABCD (Fig. 81) este DP; іар а трїѕнгїюлѕї ABC (Fig. 82) este CD. Ne пѕtem скъпа de а konsidepa, în трїѕнгїюрї, înълцімілe esterpne, лѕînd de вірf ѕнгїюл оптѕs, шi латѕра опѕсъ de вас. Dака ѕнгїюл B ар fi fost dpent, înълцімéа s'ар fi konfѕndat кѕ латѕра CB.

ПРІNЧІПѸРЇ ЏЕNЕРАЛЕ ПЕNТРѸ МЪЅѸРА ЅѸПРАFЕЏЕЛОР.

102. Dѕпе definiцiea датъ ачестеї zічерї, noї zічем къ мъсѕра ѕнеї сѕпрафеце оаре-каре este нѕмърѕл каре аратъ de кîte орї ачеастъ сѕпрафацъ конpinde о алтъ кѕноскѕтъ лѕатъ dpent ѕніме.

Este înведерат къ нѕ поате чîнева съ'шї факъ о idee кѕратъ de о întindepe сѕпрафацiалъ de кît нѕмаї компарîndѕ-о кѕ о алтъ фацъ кѕноскѕтъ. Аша о асемeнеа întindepe нѕ ва fi нічї декѕм definitъ, dака вом zіче къ еа este de 25 stînжinї de лѕнцime, фъръ а'ї аръта лъцімеа, шi віче версъ. Se паре кѕ toate ачестеа къ прin аръtареа de о датъ а ачестор доъ елементе, пѕтем авеа о idee îndestѕлъ de валоареа ѕнеї сѕпрафеце; шi este аdевърат, къ în лiпsа алтор кѕноштінце маї positiве, мѕлте персоане se мѕлцѕмеsк кѕ ачестеа. Dар о компарацie аша пъцін пречісъ нѕ este destѕлъ пентрѕ челе маї мѕлте черерї atinгътоаре de сѕпрафеце. Кѕм ам ръспѕнde, спре ексемплѕ, ла ачеастъ черере: ѕн пътрат лѕнг de 8 stînжinї шi лат de $5\frac{1}{2}$; шi ѕн трїѕнгїѕ кѕ басѕл de 12 stînжinї шi înълціме de 7; каре dinтр'ачесте сѕпрафеце este чеа маї маре? Кѕм ам

ръspsnde ла зртътоареа întребаре: а требsit 11 баniце de грîš ка съ se semene sn лок triзngюлар de 45 metре de бas ши 22 de înълциme; kît ар требsi ка съ se semene sn dreptsngiš de 62 stînжinî лsng ши 20 лat?

Se înцелеце лesne къ simпла кsпоштinцъ а dimensiiлор snei царинî, фъръ алt termen de компарацie, ne пот кondsче ла евалsацiî преа nemъrite, ши къ ар fi fost maî бine, дака ам fi кsnoskst kîte sspraфеце кsnoskste ши еквале кs о snime арбітраръ se копrind în sspraфаца despre кare ne este ворба. Аша проблема d'întîš este desъвîршit resoлsтъ, kînd кsnoaштem къ sspraфаца dreptsngюлsî копrinde 44 пътрате de sn stînжin латsра, ши къ sspraфаца triзngюлsî копrinde nsmaî 42 de aчestea. În kît пentrs а doa проблемъ, дака вош шti къ цаrina d'întîš копrinde 495 stînжinî пътрацî, ши чеа d'ал doiлеа копrinde 1240, deslegarea ва fi ал patrsлеа termen ал пропорцieî:

$$495 : 1240 :: 11 : x = 27^b,555.$$

Kîtimea требsinчioasъ ка съ se semenea локsл d'ал doiлеа este de $27^b,555$.

Noî рекsnoaштem требsinца de о snime sspraфaцiалъ ка съ мъssръm sspraфецеле, ши noî прічепem кsm se поate репреsenta aчestea прin nsmере. Дар че fел de sspraфaцъ вош алеце noî пentrs snime? În адевър, тоате fелsрiле de fiгsрî ши de мъrimî пот slsжi de snime, дака este о datъ бine definitъ; dар лesne se поate înцелеце къ чеа maî potrivitъ este пътратsл, авînd drept латsръ snimea мъssрiî liniаре кare а slsжit ла евалsацiea dimensiiлор fiгsреî. Дака палма este snimea лsнцimiî, snimea ss-

прафацiалъ ва fi палта пътратъ, adiкъ пътратвл каре аре de o палшъ латвра. Daка внimea лвнцimiĭ este stîнжiнвл, stîнжiнвл пътрат ва fi внimea свпрафацiалъ. Noĭ вом свноsа tot d'авна къ stîнжiнвл este внimea лiniаръ, шi stîнжiнвл пътрат внimea свпрафацiалъ. Dвпъ ачеstea, а мъсвра о свпрафацъ оаре-каре însemneазъ пентрв ноĭ, а къвtа de кîte орĭ ачеаstъ свпрафацъ копрinde stîнжiнвл пътрат, копрinzîndв-se фракцiiле.

Noĭ вом аръtа, tрътînd despre арпентацiв, каре sînt modifiкацiiле че tребве съ прiiмеаскъ ачеаstъ tеорie кînd не-вом слвжi кв вн алt фел de внiме.

---

§ I. МЪSВРА SВПРАFЕЦЕЛОР.

(Апл. 102—117).

Теорема I.

103. Арiеа внвĭ dрепtвнгiв este еквалъ кв продвктвл басвлвĭ съв прin а sа înълцimе, adiкъ sпре а авеа нвмървл stîнжiнiлор пътрацĭ че копрinde вн dрепtвнгiв, tребве съ îmmвлцiш нвмървл stîнжiнiлор че копрinde басвл съв, прin нвмървл stîнжiнiлор копрiншĭ în înълцimеа sа (Fig. 77).

Demonstpацie.

Fie басвл AB=7 stîнжiнĭ, шi înълцimеа BC=4[st]; zік къ свпрафаца копрinde 7×4=28 stîнжiнĭ пътрацĭ.

Fiind басвл îmпърцit în 7 пърцĭ еквале, dака

прin пѫнктѕрiле de împърцiре вот арdiка перпеndiкѕларе, вот авеа 7 dрепtѕнгюрї екѕале кѕ басѕл de ѕn stînжiн шi 4 de înълцiме; dака вот împърцi шi înълцimea în патрѕ пърцї екѕале, шi вот dѕче пареле ла бас, fie-каре dinтр'ачесте 7 dрепtѕнгюрї ва fi împърцit în 4 пърцї, din каре ва авеа fie-каре de кîte ѕn stînжiн басѕл шi înълцimea, каре фаче stînжiнї пътрацї. Nѕмърѕл ачестор пътрате este împеdерат екѕал кѕ de 4 орї 7, пентрѕ къ se копрind 4 în fie-каре din ачесте 7 dрепtѕнгюрї; аша dар песте tot sînt 28 de stînжiнї пътрацї. Рацiонаментѕл ва fi împеdерат ачелашї, пентрѕ ор-каре нѕмере întрецi. Аша dар în џенерал, шчл.

Ачест рацiонамент este întемеiat пе сѕпоsiцiеа къ басѕл шi înълцimea dрепtѕнгюлѕї копрinde нѕмаї мъсѕрї întрецї. Este лесне а întinde ачеаста ла касѕл în каре ачесте dimensiiї копрind шi фракцiї

Fie, спре ексемплѕ, басѕл AB (Fig. 78) каре съ копрinзъ $6\frac{3}{10}$ st, шi înълцimea AC$=3\frac{2}{5}$ st. Dѕкînd ка маї сѕс пареле прin пѫнктѕрiле de împърцiре, вот desпърцi dрепtѕнгюл în пътрате шi пърцї de пътрате. Dака $gB=\frac{3}{10}$ dinтр' ѕn stînжiн, dрепtѕнгюл $gBmn$ ва прецѕi împеdерат $\frac{3}{10}$ dinтр' ѕн stînжiн пътрат, шi о бандъ орiзонталъ ва прецѕi ѕн нѕмър de stînжiнї пътрацї екѕалї кѕ $6\frac{3}{10}$. Кîte треле банde орiзонтале întрецї вор прецѕi dар $3\times(7\frac{3}{10})$ stînжiнї пътрацї. În сфîршit, банda чеа мiкъ орiзонталъ каре este înалтъ de $\frac{2}{5}$ din stînжiн, прецѕind $\frac{2}{5}$ dinтр'о бандъ орiзонталъ întреагъ, ва fi $\frac{2}{5}$ din $7\frac{3}{10}$; аша dар сѕпрафаца тоталъ ва fi $3\times(7\frac{3}{10})+\frac{2}{5}\times(7\frac{3}{10})$, саѕ каре este

tot ѕna $(3+\frac{2}{5})\times(7\frac{3}{10})$, adікъ prodѕktѕл basѕлѕї прin înълцime ка шi maї sѕs.

Este îmвedepat къ aчest рацionament se поate апліка ла ор-че fракціе.

Алтъ demonstpaціe.

104. Вom doвedi, пpintp'ѕn рацionament asemenea кѕ чел întpeвѕinцat în компарацiea ѕнгіѕрілор (n°. 56), къ dpeптѕгіѕріле de ачееашї înълціme se аѕ întpe еле ка basѕріле лор. Ѕрmeazъ dintp'aчeasta къ sѕпрafaцa ѕнѕї dpeптѕнгіѕ este пропорціоналъ кѕ basѕл sъѕ; аша dap basѕл este ѕn faктop în espesiea нѕmepікъ asѕпpa feцiї. Тot кѕ кіпѕл aчesta doвedim къ înълцimea este ѕn алt faктop ал sѕпрafeцeї aчesteїa. Аша dap sѕпрafeцeле dpeптѕнгіѕрілор se аѕ întpe еле ка prodѕktѕріле basѕрілор прin але лор înълцiмї.

Dѕпъ aчestea, fie ѕn dpeптѕнгіѕ oаре-каре R, ал кърѕіа вas шi înълцime sъ fie pespeктiв b, h; fie ѕn алt dpeптѕнгіѕ r, aвînd dpeпt вas шi dpeпt înълцime ѕnimea de mъsѕръ, каре faчe ѕnimea пътpatъ; вom aвea:

$$R:r::b\times h:1\times1;$$

de ѕnde $R=r\times b\times h$. Аша dap dpeптѕнгіѕл чел mape конpinde ѕnimea sѕпрafaціалъ r de ѕn нѕmър de орї екѕал кѕ prodѕktѕл basѕлѕї sъѕ прin înълцimea sa.

Sхоліe.

Daка dimensiiле dpeптѕнгіѕлѕї sînt кътimї некоmensѕpaвiле, вom întinde шi ла касѕл aчesta рацiопаmentѕл шi teopema de maї sѕs, sѕвstitѕind în ло-

кꙋл аdевърателор dimensiĭ але dpetꙋпгюлꙋĭ, прецꙋрĭ каре se deosiбesk de ачеstea кꙋ о кътime maĭ miкъ de кît ор-че кътime datъ. (n°. 58).

Королар I.

105. Ꙋрmeazъ din teopema че demonstpъш, къ sꙋпрafaца ꙋпꙋĭ пътрat se doбîndeште îmmꙋлцind басꙋл sъꙋ prin ел-însꙋшĭ. Ачеastъ sꙋпрafaцъ faче dap чееа че se пꙋmeште în apitmetiкъ пътpatꙋл ꙋпꙋĭ пꙋмър, шĭ ачеasta este negpeшit opiцina ачеsteĭ пꙋшipĭ date ла ꙋп podꙋкt de doĭ faкtopĭ екꙋалĭ.

Ꙋп пътрat de о латꙋръ de 7 st. копpinde 7×7 saꙋ 49 stînжinĭ пътраци. De aiчĭ se веde кît este de nenotpiвitъ esпpesiea вꙋлгаръ de 2, 3, 4 палme пътpate ка sъ арate ꙋп пътрat а кърꙋiа латꙋръ este de 2, 3, 4 палme, pentpꙋ къ копpinde 4, 9, 16 палme пътpate (Fig. 79).

Se înцелеце юръшĭ кît se înшалъ чineва кînd кpede къ ꙋп пътрat este îndoit, întpeit.... de кît алтꙋл, pentpꙋ къ аре о латꙋръ îndoitъ, întpeitъ, шчл. În цeнерал, sꙋпрafeцеле пътрателор se аꙋ întpe еле пꙋ ка басꙋpiле, чi прекꙋш пътpateле пꙋшеpiче але ачеstop басꙋpĭ.

Ачеasta se simte прin firꙋpa 79.

Королар II.

106. Ꙋп metpꙋ пътрat tpeбꙋe dap sъ копpinzъ de 10 орĭ 10, saꙋ о sꙋtъ de dечimetpe пътpate, лꙋкpꙋ че se кꙋпоаште лesne din.insпeкцiea Fig. 80, ꙋnde лꙋпцimea AB înfъцiшеazъ ꙋп metpꙋ deskomпꙋs în 10 dечimetpe.

Asemenea afлъш къ dечimetpꙋл пътрat прецꙋеште

100 чentimetpe пътpate, ші чentimetpъл 100 milimetpe; аша dap întp'ън продъкt съпрафаціал, dечіmetpеле пътpate sînt репресentate prin челе dоъ zечimале d'întiĭ, чentimetpеле prin ърmъtoapеле dоъ. milimetpеле prin a чinчea ші a шasea. Тоатъ teopiea фракціілор din metpe пътpate se pedъче лъ ачеastъ ънікъ ші simплъ обsepваціe.

Fie ън dpentънгіъ къ бas de 22^m, 625, ші къ înълціme de 8^m, 313. Съпрафаца sa ва fi 22,625× 8,313=188,081625 saъ 188 metpe, 8 dечimetpe, 16 чentimetpe, ші 25 milimetpe пътpate.

Теоrема II. (id.)

107. Apiea ънъĭ tpiънгіъ este екъалъ къ жъmъtatea продъкtъльĭ басъльĭ sъъ prin înълціmea sa (Fig. 83).

Dem. Коборînd înълціmea CD, кънoaштem къ tpiънгіъл este împъpцit în dоъ пърцĭ, каре sînt fieкаре жъmъtatea ънъĭ dpentънгіъ de ачелашĭ бas ші ачееашĭ înълціme; аша dap tpiънгіъл total este ші ел жъmъtatea ънъĭ dpentънгіъ de ачелашĭ бas ші ачееашĭ înълціme; аша dap ел аpe de тъъръ жъmъtatea тъъpeĭ dpentънгіъльĭ. Аша dap, шчл.

Короλар (Fig. 84).

Ърmeзъ dintp'ачеasta къ dака басъл ънъĭ tpiънгіъ este împъpцit în пърцĭ екъале, ші вom dъче dpente din віpф ла deosiбitеле пънkтъpĭ de împъpціpe, вom авеа atitea tpiънгіъpĭ еkвіваленte, pentpъ къ аъ басъpĭ екъале ші о înълціme комънъ, adікъ перпен-

dікѕлара коворіtъ din вірfѕл лор комѕн пе лініеа васѕрілор.

Teorema III. (id.)

108. **Арiеа ѕнѕĭ параледограм este екѕалъ кѕ продѕкtѕл васѕлѕĭ съѕ прin înълцimea sa.** (Fig. 85).

Dem. Este destѕл спре ачеаsta ка ѕн параледограм съ fie екѕал къ ѕн dреntѕнгiѕ de ачелашĭ вас шi de ачееаш înълцime; чееа че este în fiinцъ.

În adевър, пе васѕл AB ал параледограмѕлѕĭ dat съ fачем ѕн dреntѕнгiѕ de ачееашĭ înълцime, шi прin ѕрмаре копрins întре ачелеашĭ параледе. Аша, DC, GH вор fi în лініе dреаптъ. Аша dар, dреntѕнгiѕл este екѕал кѕ fiгѕра toталъ, маĭ пѕцin tріѕнгiѕл CBH; шi параледограмѕл este asemenea екѕал кѕ fiгѕра toталъ, маĭ пѕцin tріѕнгiѕл DAG. Dар ачеste доъ tріѕнгiѕрĭ sînt екѕале; пентрѕ къ аѕ доъ латѕре екѕале ѕна алteia ка опѕse але параледограмѕлѕĭ, шi ачеste латѕре копрind ѕн ѕнгiѕ екѕал din прічіна параледismѕлѕĭ лор. Аша dар параледограмѕл este екѕал кѕ dреntѕнгiѕл. Аша dар, шчл.

Королар.

Параледограмеле de ачелашĭ вас seаѕ întре еле прекѕм înълцimеле лор, шi віче версa; asemenea este шi кѕ tріѕнгiѕріле.

Teorema IV. (id.)

109. **Арiеа tрапезѕлѕĭ este екѕалъ кѕ продѕкtѕл semisѕмеĭ васѕрілор sале прin а sа înълцime** (Fig. 86).

Dem. Ачеаstъ резѕлtъ d'а dрептѕл din deском—

пѫнереа tрапеzѫлѫї în doъ tрiѫнгюрї прiн о diагона-лъ BD. Dар преферъm sъ о demonstръm прiн о про-прietate а tрапеzѫлѫї каре не ва sлѫжi maї ла вале.

De вom îmпреѫна челе doъ miжлокѫрї але лatѫ-релор tрапеzѫлѫї прiн dреanta *mn*, ачеasтъ dреanтъ ва fi екѫалъ кѫ semisѫma basѫрiлор.

Sъ dѫчем *pno* паралел ла AD; вom кѫноаште лesne къ tрiѫнгюл *Cno* este екѫал кѫ tрiѫнгюл *pn*B; пentрѫ къ *nc*=*n*B, шi ѫнгюрiле sînt екѫале ка ал-tерне interне; аша dар *Co*=*p*B; аша dар basѫл чел mік кîштiгînd чеea че перde чел mаре, sѫma ръmî-не ачееашї, шi еа este екѫалъ лѫї DO+AP; къtре ачestea, din прiчiна параделограmѫлѫї, AP=DO=*mn*; аша dар sѫma basѫрiлор=2*mn*. Аша dар dреan-ta че ѫнеште miжлокѫрiле лatѫрелор este екѫалъ кѫ semisѫma basѫрiлор.

Шi înкъ, tрепеzѫл este екѫал кѫ паралелогра-mѫл. Аре dар de mъsѫръ basѫл паралелограmѫлѫї îm-mѫлцit прiн înълцimea sa. Dар basѫл паралелогра-mѫлѫї este semisѫma basѫрiлор tрапеzѫлѫї. Аша dар, шчл.

Teorema V. (id.)

110. **Sѫпрафаца ѫнѫї полiгон регѫлат este екѫалъ кѫ semiпродѫкtѫл перimе-tрѫлѫї sъѫ прiн раzа черкѫлѫї însкрis.** (Fig. 87).

Dem. Полiгонѫл este комnѫs de atîtea tрiѫнгюрї авînd ачелашї bas шi ачееашї înълцimе кîte латѫре аре полiгонѫл. Înълцimea комѫнъ este îmвеdерат раzа черкѫлѫї însкрis. Аша dар sѫma sѫпрафецелор каре este екѫалъ кѫ semisѫma basѫрiлор прiн înъл-

ціmea комѕнъ, este semiпроdѕктѕл періmetрѕлѕї прin раzа черкѕлѕї înskpis. Ачеastъ раzъ OZ se нѕmеще апоtема полігонѕлѕї.

Теорема VI. (Апл: 117).

111. Sѕпрафаца черкѕлѕї este semiпроdѕктѕл чірконферінцеї прin раzъ (Fig. 88).

Dem. Înкіпѕіndѕ-ne чірконферінца deskomпѕsъ în елементеле sале немърцinit dе мічї, ла estpemitъціле кърора sъ dѕчем раzе, авем о мѕлціме de tpiѕнгюрї елементаре, компѕind sѕпрафаца черкѕлѕї, каре intpъ atѕнчї în teopema пречеdentъ. Ачеastъ sѕпрафацъ este dap аквалъ кѕ semiпроdѕктѕл чірконферінцеї îmмѕлцitъ прin înълцimea комѕнъ а tpiѕнгюрілор. Însъ, ачеastъ înълціmе se конфѕndъ кѕ раzа черкѕлѕї. Аша dap sѕпрафаца черкѕлѕї este semiпроdѕктѕл чірконферінцеї прin раzъ.

Королар.

Ѕn sektop аре de мъsѕръ semiпроdѕктѕл аркѕлѕї sъѕ; ші sѕпрафаца serмentѕлѕї se афлъ лѕîndѕ-se sѕпрафаца sektopѕлѕї întpeг, ші skъzîndѕ-se dintp'însa ачееа а tpiѕнгюлѕї каре аре de бas коарda serмentѕлѕї.

Обсерваціï asѕпра проблемеï патрѕлатѕреï черкѕлѕï.

112. Se înцелеце прin патратѕра ѕнеï фігѕрї, кіпѕл de а фаче цеометрічеще ѕn патрат еквал în sѕпрафацъ кѕ о фігѕръ datъ, каре se поate пентрѕ toate фігѕріле dpent-лiniate. Фачем, sпре eksem-

плѫ, ѫn пatpat екѫал кѫ ѫn dpeптѫпгїѫ, лѫînd пentpѫ latѫpa пътpatѫлѫї aчestѫїa, ѫn medїѫ пpoпopцїonaл întpe чеlе doъ dimensiї ale dpeптѫпгїѫлѫї; пentpѫ къ de вom пѫmi b, h aчeste doъ dimensiї, шi x me-diѫл, вom aвea: $b : x :: x : h$; de ѫnde $x \times x = b \times h$. Esпpesiea d'aл doiлea este a sѫпpafeцeї dpeptѫпгїѫлѫї; чea d'întîїѫ este a ѫnѫї пatpat каpe вa a-вea пentpѫ latѫpъ пe x; aшa dap aчest пatpat вa fi екѫiвalent кѫ dpeптѫпгїѫл.

Fiind къ sѫпpafaцa чepкѫлѫї este пpodѫktѫл se-miчipкonfepinцeї пpin pazъ, ap ажѫпцe, кa sъ пъ-tpъm чepкѫл, sъ лѫъш ѫn medїѫ întpe aчeштї doї faktopї; шi aчeasta ap fi latѫpa пatpatѫлѫї екѫiвa-lent кѫ чepкѫл. Dap aчest miжлok îmfъцiшazъ o гpeѫtate padiкалъ în eксeкѫцiea sa, пentpѫ къ пpesѫ-пѫпe кѫпosкѫtъ mъsѫpa цeometpiкъ a чipкonfepinцeї, пpoблemъ a къpiia soлѫцie s'a къѫtat în zadap пînъ aкѫm.

Întîїѫ este îmвedepat къ dѫпъ fopma sa чipкon-fepinцa sкaпъ de sinгѫpeлe instpѫmente de mъsѫpa-pe чe ape цeometpiea eлementapъ, adiкъ pigлa шi кompasѫл. Fiind къ пѫ пѫtem aвea mъsѫpa d'a dpeп-tѫл, чipкonfepinцa se poate кѫпoaшte пѫmaї daкa eksistъ oape-кape paпopt xotъpit întpe ea шi oape-кape altъ къtime sѫпѫsъ кompasѫлѫї, пpeкѫm este paza. În кasѫл aчesta, чipкonfepinцa fiind кѫпosкѫ-tъ пpin ажѫtopѫл pazeї, вom пѫtea eксeкѫta кon-stpѫкцiea din кape pesѫltъ пatpatѫpa, кa шi кînd кѫpвa ap fi fost mъsѫpatъ d'a dpeптѫл. Daкa шtim, spe eksemплѫ, къ жѫmъtatea sa кonpinde de tpeї opї шi жѫmъtate paza, вom лѫa ѫn medїѫ цeometpiк

întpe aчeastъ pazъ шi o лinie dpeantъ kape sъ fie ekвaлъ kв tpeî paze шi жвmъtate.

Тpeбвe dap sъ aflъm în fie-kape kas panoptвл nвmepik aл вneî semiчipkonfepinцe kъtpe paza sa. Dap, dвne teopema (n°. 88), чipkonfepinцeлe aвîndв-se tot d'aвna întpe eлe ka pazeлe лop, eksistъ вn nвmъp вnik kape înfъцiшeazъ panoptвл вneî semiчipkonfepinцe oape-kape kъtpe paza sa, шi чepepea ажвnцe a гъsi aчest nвmъp. De вom sвnвne paza ekвaлъ kв вnimea, aчest nвmъp вa fi npeцвл semiчipkonfepinцeî. Aшa dap, бъгînd de seamъ kъ чepepea imnвne ka nвmъpвл kъвtat sъ noate sъ fie kв totвл însemnaбiл, ziчem kъ npoблema natpatвpeî, чepkвлвî peвine a detepmina npin ажвtopвл вnвî nвmъp paцionaл, лвnцimea semiчipkonfepinцeî a kъpiia pazъ este вnimea.

Aчest nвmъp вestit kape se apatъ npin лitepa π, iniцiaлъ a ziчepiî περιφέρεια, nв s'a nвtвt afлa kв toate siлinцeлe цeniвлвî шi ръбdъpiî antikitъцiî. Kввîntвл este npea simnлв; чepчetъpiлe modepne aв doвedit kъ nвmaî npin ажвtopвл kitiшeлop nepaцionaлe se noate doбîndi; aлt-feл soлвцiea aбsoлвtъ a npoблemeî este neste nвtinцъ; dap pentpв kъ ne este npea tpeбвinчioasъ în npaktikъ, fiind kъ ne anъpъ de a maî mъsвpa tot d'aвna чipkonfepinцa, лвkpв гpeв шi neste nвtinцъ a se eksekвta, цeometpiî aв nвs toate siлinцeлe лop spe a detepmina kв anponiepe nвmъpвл π. Simnлe mъsвpî mekaniчe nenepfekte doвedesk kъ aчest nвmъp este чeвa maî mape de kît 3; nвtem înkъ detepmina nînъ лa o a sвtълea din вaлoapea sa, шi aчeasta вa fi вn panopt maî eksakt de kît aчeлa

ал люї $3\frac{1}{7}$ saŭ $\frac{22}{7}$, пе каре іл пъmesк рапортъл люї Архімеd. Dар ачеста ар fi о determinaцie неперfектъ шi шаї пъціn de кiт чер треБъinцеле практiчеї. Nъшързл $\frac{355}{113}$ afлat de Metie este кз тзлt шаї ексакt, пentрз къ ажзnце ла 3,1415927, прец каре аре грешалъ ла а шаптеа zечiтаалъ. Ачеst рапорt este преа intреБъinцat. Este преа лesne de цinзt minte din прiчiна disпзnерiї вреdniче de insemnat а цiфрелор termenilор sъї 11, 33, 55.

În sfіршit валоареа пзтързлзї п desвoлtat in zечiтале de deosеБiцi калкзлаtорi s'а ардiкаt пiнъ ла 145 цiфре; апроксiтацie тзлt maї presзs de кit треБзinцеле челе maї intinse. Челе d'intiiŭ 35 zечiтале s'аŭ калкзлаt de Оландеzзл Van Ceulen, прinтр'зн metod че'л вот еsпзne шаї ла вале, шi а къpзia intреБзinцаре inaintatъ пiнъ ла ачеst termen este о шinзne de ръвdареа че зn sinгзр от поаte fi in stаре d'а авеа. Челе-лалте цifре s'аŭ aflat de енглеzзл Machin, францеzзл Lagny, шi maiорзл азstріак Wéga; insъ ачеstea saŭ aflat прin о formзлъ алцеБрiкъ, а къpia аплiкацie este кз тзлt maї лeste de кit metodзл люї Van Ceulen.

Se inцелеце къ solзцiea цеоmetрiкъ а ачеstеї проБлете, saŭ кiар determinaцiea комплектъ а пзтързлзї п, de ар fi fost рацiонал, n'ар fi авзt пiчї зn аванtацiŭ asзпра зnеї апроксiтацiї inaintate atit de denарtе; каре фаче кз totзл de прisos черчетърiле пе вiitор. Ка sъ калкзлъm, апроапе кз шаї пзцin de зn milimetрз о чiрконferinцъ de зn черк кз раzа de зn Бiлiоn de леге, не треБзе пзтаї 16 zечiтале. Însъ о алт-fел de валоаре fiind кз тзлt maї presзл de кit ор че eksistъ in naturъ, se веde къ

цifреле че вom afла maї інколо de a 16-леа zечi-малъ se пot лъsa. Кȣ toate aчеstea noї dъm валоареа лȣї п пentрȣ кȣрiozitatea чititорȣлȣї:

п = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582
23172 53594 08128 4802.

Раza fiind ȣnimea, semiчiрконferinца ва fi maї лȣнгъ de кit aчest нȣмър; ea ва fi, din контра, maї скȣртъ, de вom сȣбstitȣa цifра 3 în локȣл челеї din ȣрmъ цifре 2: ast-feл în кit пȣtem сȣпȣне къ шi ȣнȣл шi чел-лалt din aчeste доъ нȣмере îшfъцiшеазъ нȣмърȣл п, кȣ toate къ aчеsta нȣ eкsistъ. Nȣmaї în sensȣл aчеsta пȣtem приimi eкsistенца нȣмерiкъ a къtimeлор нерацiонале.

Întребȣinцареа ординаръ чере ȣн mik нȣmър de zeчimaле; кȣ toate aчеstea, fiind къ нȣ este destȣл съ шtim къ faчem ȣн калкȣл преа апропiiat, чi требȣе съ кȣноаштem треапта апроксimaцiеї, noї вom ziче къ în ценерал требȣе съ se кinzȣiaскъ чinева despre грешала че требȣе съ приiшеаскъ în калкȣлȣл ȣнеї чiрконferinце, шi съ determine кȣ кite zeчimaле требȣе съ întребȣinцъш пе п. Aчеasta se ва лъmȣрi прiн eкsemпле.

Воim съ калкȣлъm, кȣ maї пȣцin de кit ȣн чentimetрȣ, semiчiрконferinца ȣнȣї черк кȣ раza de 100 de леге.

О сȣtъ de леге fак 400,000 metре; аша dар ȣн metрȣ este $\frac{1}{400000}$ din разъ, шi чentimetрȣл este

$\frac{1}{400000 \times 100} = \frac{1}{40000000}$; аша dap пѫtem neѫ-коli о а патрѫzечї-miлioanелеа din paзъ; аша dap, кѫ atit maї mѫлt кѫвint, о а sѫtъ-minioanелеа, zeчimaлъ intpe каре шi чеа пречеdentъ а eї se ко-пpinde fpaкцiea $\frac{1}{40000000}$; аша dap, de вom immѫл-цi paza 400000 npin nѫmъpѫл п, лѫind пinъ ла а о а sѫtъ-miлioanелеа iнклѫsiв, грешала ва fi maї miкъ de кit ачееа че не am imвoit а npiimi.

Ал doiлеа, se чере, кѫ о грешалъ maї miкъ de кit ѫn deчimetpѫ пътpat, sѫпpaфaцa ѫnѫї черк каре sъ aїбъ paza de 7 леге шi жѫmъtate saѫ de 30000 metpe.

Paza ѫnѫї черк fiind R, semiчipкonfepinцa sa = πR; sѫпpaфaцa sa = $\pi \times R \times R$, saѫ πR^2, adiкъ пъ-tpatѫл pazeї immѫлцit npin nѫmъpѫл π. Ачеаsta este еspresiea чеа maї комѫнъ а sѫпpaфeцiї черкѫлѫї. Aiчї $\pi . R^2 = \pi \times 30000 \times 30000 = \pi \times 900000000$ metpe пътpate.

Тревѫе dap ка fpaкцiea zeчimaлъ ла каре не вom опpi ла intpeвѫinцapea лѫї π sъ fie astfeл in кit лѫa-tъ din nѫmъpѫл а 900000000 metpe пътpate, sъ dea ѫn deчimetpѫ saѫ $\frac{1}{100}$ din metpѫл пътpat. Dap ѫn me-tpѫ, ap fi $\frac{1}{900000000}$ din 900000000 de metpe. Аша dap ѫn deчimetpѫ ва fi а о sѫtълеа dintp'ачеst пpeц, saѫ $\frac{1}{900000000 \times 100} = \frac{1}{90000000000}$ din nѫmъpѫл de 900000000 metpe. Аша dap, вom лѫа nѫmъpѫл п пinъ ла zeчimaла de opdin maї ma-

pe de kît fракціea $\frac{1}{90000000000}$, adікъ вот лва 11 zeчішале. Sвпрафаца ва fi dap 900000000 × 3, 14159265359 = 2827433388, 2310000000, adікъ 2827433388 метре, ші 23 dечіметре пътрате, грешалъ maĭ mікъ de kît вn dечіметрв пътрат.

Кв toate ачестеа noĭ рекomandъm пентрв треввінцеле opdінаре нвmървл 3,14159, saŭ maĭ віne 3,1416, каре este tot вna, ші грешала este maĭ mікъ de kît o a svtъ-miiлea. Вom аръta къ ачест нвmър 3,1416, каре e преа леste de цінвt minte din прічina a доъ пвтере кв soц konsekвtіве 14, 16, ковіршеште тревvінца твтвлор апліkaціілор.

Съ sвпвnem вn черк de o легъ saŭ de 4000 метре în разъ; чірконферінца sa, калквлатъ dвпe ачест нвmър, ва da грешалъ maĭ mікъ de kît o a svtъ-miiлea din 4000 метре, adікъ de 4 чентиметре: каре este o лъціме апроапе de доъ деџете пе o лвнціме de maĭ mвлт de треĭ леге.

Грешала пе sвпрафаца черквлвĭ ва fi o a svtъ-miiлea din r^2, saŭ din 16000000 метре пътрате. Ачеастъ фракціе ажвнџе ла 160 метре пътрате, каре ла 16 milioane de метре нв este maĭ mвлт de kît 4 чентиметре ла треĭ леге.

Съ sвпвнem, чееа че se întîmплъ ші maĭ des, къ diaметрвл черквлвĭ нв ковіршеште 200 метре: чееа че este maĭ mape de kît întindepea твтвлор піацелор чірквларе, a васінврілор, a desemnелор de tot фелвл în архітектвръ ші гръдінъріе, грешала асвпра чірквнферінцеĭ ва fi de доъ zeчĭ de opĭ maĭ mікъ, adікъ de доъ miлімeтре, saŭ maĭ mікъ de kît o лініе, пе o лвнціме апроапе de 2000 пічіоре.

Bedem къ аплікînd нътървл 3,1416 ла черкъріле ордінаре, прекът пъцърі, basinърі, болте de архітектъръ, аркаde de поартъ, ferestre ші колонаde, чірконferinце de въцї ші de ор-че fел de base, ле пътем sokoti ка dînd о тъзъръ рігъроасъ. Кътре ачестеа, калкълъл прін ажъторъл съў fiind tot atîta de скърт кît ші калкълъл în каре am întребвінца рапортъл маї de рînd $\frac{22}{7}$, noї isгоnim пе ачеста, ші не вош слъжі tot d'авна къ прецъл 3, 1416.

Акът вом еспъне вnъл din metoaделе че пот слъжі а калкъла нътървл п.

Пролемъ.

113. Съ determinъm рапортъл апропііат ал чірконferinцеї кътре diametрвл, саў ал semічірконferinцеї кътре разъ.

Solъціе.

Теоріеа de каре atîрнъ solъціеа ачестеї проблеме есте întemeiatъ пе ачест прінчіп къ dака доъ лініі кърбе саў полігонале конвексе se търцінеск ла ачелеашї estremitъцї, лініеа înкъnжърatъ ва fi tot d'авна маї скъртъ de кît лініе înкъnжърînдъ. Прін кърбе конвексе, înцелецем пе ачелеа каре нъ se пот тъіа de о лініе dреаптъ în маї мълте de доъ пънктърі. Еатъ demonstраціеа ачестъї прінчіп.

Fie (Fig. 89) ASTB, AMNPB, челе доъ лініі de каре не есте ворба. Dака прінtр'вn пънкт оаре-

каре T ал лiniei înвълвite, пе înкiпвiш ла ачеastъ лiniе о tanџentъ PN прелвнџitъ пiпъ se ва întiлпi кв лiniea înвълвindъ, свбstitвџiea лiniei dрепtе PN în локвл пърџii кврбе NKP, ва fаче контврвл înвълвindei maï mik, шi snaџiвл копрins întpe îmвълвitъ шi пова înвълвindъ AMNIPB, ва fi шi maï mik, пепtpв къ snaџiвл пpiшitis s'a mikшорат кв свпрафаџа serментвлвi NTPK.

О а doa tanџentъ ла înвълвita, dвsъ пpintр'вп алт пвнкт оаре-каре S, ва редвче înкъ шi лвнџimea înвълвindei пpin свбstitвџiea лinii dрепtе MG în локвл лinii кврбе MNG, шi snaџiвл копрins întpe челе doъ лinii пpin лепъdареа serшетвлвi MNGS. În џенерал, fie-каре tanџentъ dвsъ dвпе sistema преческdentъ ва fаче о поъ редвчере, шi în лвнџimea înвълвindei шi în snaџiвл каре о desпаrtе de înвълвita. Аша dар, dака пpintр'вп шip de mikшоpърi свкчеsiве, snaџiвл ва ажвнџе ла minimвm съв, лвнџimea înвълвindei ва fi шi еа miniшвл съв, saв чел пвџin еа ва fi maï mikъ de kît în toate kasвpiле пречеdente. Dар, snaџiвл ва fi чел maï шik пвtinчios, kînd ва fi пвлъ, adikъ kînd înвълвinda se ва конfвnda кв înвълвita. Аша dар шi înвълвinda ва fi atвnчi ла miniшвm съв, saв кв алте ворбе, ва fi tot d'авпа шaï mаpе de kît înвълвita.

Двпе ачеstea, съ пе înкiпвiш къ am înskpis, în чiркопfеpinџа, вп полiгоп регвлат ал къpвi перiметрв съ аiбъ о лвнџiше квпоskвtъ, раза fiind лвatъ dрепt вniме, шi къ квпоаштем шi перiметрвл полiгонвлвi asешenea чiркопskpis; dака еspрesiiле пвмеpiче але ачеstор doъ перiшетpе aв о парте комвпъ, чiркопfеpinџа авînd, dвпе пpinчiпвл de шaï

sȣs, прецȣл sъȣ̆ копрins între прецȣріле челор доъ полігоане, партеа комȣнъ ла еsпресіеа челор доъ періметре, ва fi негрешіt прецȣл чіркоnferinцеї, пе каре іл вом кȣноаште кȣ ȣн град оаре-каре de апроксімаціе.

Кътре ачестеа, дака ам пȣтеа tot d'aȣна sъ калкȣлъм періметрȣл ȣнȣї полігон регȣлат кȣ ȣн нȣмър de латȣре îndoit de кît ачела ал полігонȣлȣї кȣноскȣт, ам пȣтеа în локȣл а доъ полігоане înскрісе ші чіркоnскрісе sъ sȣбstitȣъм алте доъ полігоане каре se вор апропіеа маї мȣлт ȣнȣл de алтȣл, ші пріn ȣрмаре кеар de чіркоnferinцъ; партеа комȣнъ ла еsпресіеа ачестор ноъ періметре, ва копрінde маї мȣлте цifре zечімале каре пріn ȣрмаре вор fi але черкоnferinцеї; ші ȣрмînd tot аша, вом ажȣнце ла о еsпресіе din че în че маї апропііатъ. Еsпресіеа семічіркоnferinцеї ва fi прецȣл лȣї п.

Ръмîне акȣм нȣмаї sъ авем пе чел d'întîiȣ̆ полігон регȣлат înскріs, ал кърȣіа періметрȣ sъ fie кȣноскȣт пентрȣ о разъ екȣалъ кȣ ȣнімеа; sъ штім калкȣла періметрȣл полігонȣлȣї асеменеа чіркоnскріs; ші sъ маї пȣтем înкъ калкȣла în цeнерал періметрȣл ȣнȣї полігон кȣ ȣн нȣмър de латȣре îndoit.

Полігонȣл de ла каре плекъм есте ексагонȣл регȣлат înскріs, а кърȣіа латȣръ есте екȣалъ кȣ раза, ші ал кърȣіа періметрȣ прецȣеште пріn ȣрмаре 6. Періметрȣл ексагонȣлȣї чіркоnскріs (Fig. 90) se аре кътре ал ачестȣіа : : OB : OK : : OA : OD. (*n*° 87. Кор.). Дар, în тріȣнгіȣл дрептȣнгіȣлȣї ODK, кȣноаштем іпотенȣза $OK = 1$, ші латȣра $DK = \frac{1}{2}$: пȣтем дар кал-

кѕла OD прін формѕла пътратѕлѕї іпотенѕѕеї каре пеste пѕціn о вом demonstpa (Теор. VII, *n*° 114). Чеї din ѕрмъ tpeї tepmeпї вор fi dap кѕпоskѕціІ іn пропорціеа de sѕs; вом копкіde din ачештііа пе чел d'intiiѕ, каре este перішеtpѕл екsагопѕлѕї чіркоп-skpis.

Sъ afлъm акѕm перімеtpѕл поліroпѕлѕї de 12 латѕpe іnskpis. О латѕръ este коарda АК, adiкъ іпо-tепѕsа ѕпѕї tpiѕпгіѕ dpeптѕпгіѕ але кърѕіа челе-лалtе doъ латѕpe sint кѕпоskѕte. Пепtpѕ къ DК este жѕ-мъtatea латѕpeї екsагопѕлѕї, saѕ іn цепеpaл, а по-ліroпѕлѕї пречеdent; AD este екѕал кѕ pаzа, шаї пѕціn лініса OD че аш калкѕлаt. Аша dap am пѕ-tea, прin ажѕторѕл ачелеіашї формѕле а пътpatѕлѕї іпоtепѕsеї, sъ detepminъm латѕpа АК а dodекаго-пѕлѕї, шї прin ѕрmаpe перімеtpѕл sъѕ intpeг. Пер-пепdiкѕлара OI se ва калкѕла ка лініеа OD, шї ва sлѕжї asemenea а detepшina перімеtpѕл dodекаго-пѕлѕї чіркопskpis.

Поліroапеле de 24 de латѕpe se вор калкѕла tot кѕ кіпѕл ачеsta, аша шї челе-лалtе; шї вом бъга de seamъ къ ачеste преціѕpї se вор deosebi din че іn че маї пѕціn. Ast-fел s'а калкѕлаt іntiiѕл рапорt ал чіркопfеpinцеї кътpe diametpѕл. Маї sint шї алtе міжлоаче ка sъ ажѕпцеm ла ачелашї peзѕлtаt фъpъ de а еші din konsidepaціiле цеометpiеї елементаре. Dap пої sокоtim къ am алеs пе ачела а кърѕіа tео-pie este чеа шаї simплъ шї чеа маї лесне de ці-пѕt minte.

---

§ II. КОМПАРАЦІЕА SȢПРАFЕЦЕЛОР.

Теорема VII. (Апл. 118—119).

114. Пътратȣл fъкȣt пе іпotenȣsa ȣпȣї tpiȣнгіȣ dpentȣнгіȣ este екȣал кȣ sȣма пътрателор fъкȣtе пе латȣре (Fig. 91).

Dem. Sъ fачем tpeї патрate пе челе tpeї латȣре але tpiȣнгіȣлȣї ABC dpentȣнгіȣ în C, шi съ коборîm пе іпotenȣsъ перпендікȣлара CDH; еа ва desпърці пътратȣл іпotenȣsеї în доъ dpentȣнге, din каре fie-каре ва fi екȣівалент кȣ пътратȣл fъкȣt пе латȣра sa.

În adевър, авем (82) пропорціеа AD : AC :: AC : AB; de ȣnde AC × AC = AD × AB, saȣ AD × AG. Чел d'întîiȣ din ачесте продȣктȣрї este sȣпраfаца пътратȣлȣї каре аре de латȣръ пе AC; чел d'ал doiлеа este sȣпраfаца dpentȣнгіȣлȣї DAGH. Аша dap, dpentȣнгіȣл R este екȣал кȣ пътратȣл Q.

Tot întp'ачеst кіп вом demonstpa къ dpentȣнгіȣл R′ este екȣал кȣ пътратȣл Q′; аша dap, sȣма челор доъ dpentȣнге saȣ патратȣл іпotenȣsеї este екȣал кȣ sȣма пътрателор fъкȣte пе латȣре.

Алтъ demonstpaціе.

114 bis. Съ dȣчем diaгоналеле CG, BM. Tpiȣнгіȣл GAG аре ачелашї бas AG кȣ dpentȣнгіȣл DAGH, шi аре ачееашї înълціme, adікъ, AD; пентpȣ къ ачеаsta ва fi distanца din вîpfȣл C ал tpiȣнгіȣлȣї ла басȣл sъȣ AG, de о вом прелȣнці înъȣнтpȣл пътратȣлȣї челȣї mік. Аша dap (n° 107) tpiȣнгіȣл este жȣmъtatea dpentȣнгіȣлȣї. Tot кȣ кіпȣл

ачesta вom doведi къ tpiѕngiѕл BAM este жѕmъtatea пъtpatѕлѕї Q. Dap ачeste doъ tpiѕnгe sînt екѕале, ка авînd ѕn ѕngiѕ екѕал копpins întpe лatѕpе екѕале ѕna алteia, adiкъ, MAB = CAG ка кошпѕse de ѕn ѕngiѕ dpent, maї mѕлt ѕn ачелашї ѕngiѕ CAB; кътpe ачestea CA = AM, ка лatѕpе але ачелѕiашї пъtpat; шi AB = AG пentpѕ ачелашї кѕвînt. De ѕnde ѕpmeazъ къ жѕmъtatea dpentѕngiѕлѕї este екѕал кѕ жѕmъtatea пъtpatѕлѕї, шi пpin ѕpшapе къ dpentѕngiѕл este екѕал кѕ пъtpatѕл. Tot кѕ кiпѕл ачesta вom demonstpa къ ал doiлеa dpentѕngiѕ DKBH este екѕал кѕ ал doiлеa пъtpat Q′. Аша dap sѕma челор doъ dpentѕngiѕpї saѕ пъtpatѕл totaл ал inotenѕseї, este екѕал кѕ sѕma челор doъ пъtpate fъкѕte пe лatѕpе.

Королар I.

Пъtpatѕл ѕneia din лatѕpе este екѕал кѕ пъtpatѕл inotenѕseї, maї пѕцin пъtpatѕл челеї-лалte лatѕpе.

Королар II.

Daка челе doъ лatѕpе але ѕнѕї tpiѕngiѕ dpentѕngiѕ sînt екѕале, inotenѕsa este diaгonaлa ѕнѕї пъtpat каpе ва авea de лatѕpъ ѕna din лatѕpелe tpiѕngiѕлѕї, шi atѕnчї este înвedepat къ ачesta este жѕmъtatea пъtpatѕлѕї; аша dap пъtpatѕл fъкѕt пe diaгonaлъ este îndoit de кît пъtpatѕл ал кърia еа este diaгonaлъ.

Dintp'ачеasta ѕpmeazъ къ, daка лatѕpa ѕнѕї пъtpat este ѕnimea, sѕпpafaцa sa fiind $1 \times 1 = 1$, пъtpatѕл diaгonaлеї ва fi 2.; аша dap ачesta ва fi нѕmъpѕл каpе, îmmѕлцit пpin sineшї, dъ 2; аша dap

ел ва fi $\sqrt{2}$. Аша dар латзра пътратзлзї ші dіагонала sа sînt некоттензsзрабіле.

Королар III.

Пътрателе латзрелор se аў întре еле ка sегтентеле іпотензsеї каре ле sînt алътзреа. Întр'adевър, еле se аў întре еле ка челе доъ dрептзнге че ле sînt еквівалeнте. Dар ачestea авînd ачееашї înълціте, se аў întре еле ка басзріле лор каре sînt челе доъ sегтенте але іпотензsеї.

Зп раціонатент аsетепеа ва dовеdі къ fie-каре пътрат se аре кътре пътратзл іпотензsеї ка sегтентзл алътзрат кътре іпотензsа întреагъ.

Теорема VIII.

115. În ор-че трізнгіў ABC, пътратзл латзреї опзsе зпзї зпгіў аsкзціт B, есте еквал кз ѕзта пътрателор че копрінd ачест зпгіў, таї пзціп îndоітзл dрептзнгіў фъкзт de басзл AB, ші dістанца BD din вîрфзл зпгіззлзї ла пічіорзл перпеndікзларей коборîтъ пе бас (Fig. 92).

Dет. Авет $AD = AB - BD$; арdікînd атîndоі тетбрі ла пътрат, афлът: $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD$. Съ adъогът de атîndоъ пърціле пе $\overline{CD}^2$, ші съ редзчет, обsервînd къ $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ (114), ші $\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$, ші вот афла $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times BD$. Чееа че тревзіа съ dетонsтрът.

Dака перпеndікзлара кадеа афаръ din трізнгізл

(Fig. 93), am авеа $AD = BD - AB$. Împътрînd амîndoї шемБрії. $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times BD$, шї челе-лалте ка маї sȣs.

Теорема IX.

116. Пътратȣл латȣреї опȣse ȣпȣї ȣпгїȣ опtȣs este екȣал кȣ sȣма пътрателор латȣрелор каре копрînd ачest ȣпгїȣ, маї мȣлt îndoitȣл dрепtȣпгїȣ format de Бas шї distanца din вîрфȣл ȣпгїȣлȣї ла пічіорȣл перпеndікȣлареї (Fig. 94).

Dem. Авем $AD = AB + BD$; împърцind чеї doї мемБрі: авем $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,AB \times BD$. Адъгînd ла амîndoъ пърцiле пе $\overline{CD}^2$, шї редȣкînd ка маї sȣs, афлъм $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB \times BD$. Чееа че треБȣеа съ demonstръм.

Королар I.

De вом ȣнї вîрфȣл C ал ȣпȣї трїȣпгїȣ оаре-каре ABC (Fig. 95), кȣ пȣпктȣл D, міжлокȣл Басȣлȣї съȣ, шї вом коБорî перпеndікȣлара CH, вом авеа de о парте $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,AD \times DH$; шї în трїȣпгїȣл CBD, вом авеа $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DH$, шї adȣпînd ачеste доъ екȣалітъцї, але кърора чеї din ȣрмъ термені se dерапъпъ пȣind în локȣл лȣї BD, пе чел екȣал кȣ dînsȣл AD, авем $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AD}^2 + 2\,\overline{CD}^2$.

Королар II.

Fie акȣм ȣп параделограм ABCD (Fig. 96), în каре пȣпктȣл O este інтерsекціеа шї пріп ȣрмаре

шіжлокѕл челор доъ diaгonaле. Вош авеа, dѕпе челе пречеdente, $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=2\overline{DO}^2 2\overline{AO}^2$. Asemenea $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{CO}^2$. Adѕnînd ачеste доъ notpiвipĭ, ші оБсервînd къ $CO=DO$, авеm $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=4AO^2+4DO^2=(2AO)^2+(2DO)^2=AC^2+BD^2$. Аша dap, în op-че параледограm, sѕma пътраtелор латѕрелор este екѕалъ кѕ sѕma пътраtелор diaгonaлелор.

Teorema X. (Апл. 120).

117. **Тріѕнгіѕріле asemenea se аѕ întpe еле ка пътраtеле латѕрелор омолоаце.** (Fig. 97).

Dem. B, H, b, h, Басѕріле ші înълцimiле респектіве а доъ тріѕнгіѕрĭ asemenea T, t; авеm $T:t::\frac{1}{2}B\times H:\frac{1}{2}b\times h::B\times H:b\times h$. Dap авеm іаръшĭ $H:h::B:b$, пентрѕ къ înълцimiле sînt înвеdepat în рапортѕл Басѕрілор. Îmшѕлцind пропорціiле dѕпе opdin, афлъm $T\times H:th::\overline{B}^2\times H:b^2\times h$; ші лепъdînd факторіĭ комѕнĭ de ла антечеденціĭ ші консекѕенціĭ, ръmîne $T:t::\overline{B}^2:\overline{b}^2$, чееа че тревѕіа sъ demonstpъm пентрѕ къ B ші b sînt оаре-каре латѕре омолоаце.

Teorema XI. (idem.)

118. **Полігоанеле asemenea se аѕ întpe еле ка пътраtеле латѕрелор омолоаце** (Fig. 98).

Dem. Dѕкînd dintp'ѕn пѕнкт G, g, diaгonaле ла dіферітеле вірфѕрĭ але челор доъ полігоане, ле вош despърці întp'ѕn ачелашĭ нѕmър de тріѕнгіѕрĭ ase-

menea ꙋнꙋл алтꙋia, ка ꙋнеле че аꙋ ꙋнгюрї екꙋале копріnse între латꙋре пропорціонале. Аша, доъ поліgoane asemenea sînt компꙋse de ꙋн ачелашї нꙋмър de тріꙋнгюрї asemenea ші asemenea disпꙋse.

Ал doiлea, авем GHA : gha :: $\overline{CH}^2$: $\overline{gh}^2$. Asemenea GAB : gab :: $\overline{GA}^2$: $\overline{ga}^2$ :: $\overline{GH}^2$: $\overline{gh}^2$; ші GBC : gbc :: $\overline{CB}^2$: $\overline{cb}^2$ :: $\overline{GA}^2$: $\overline{ga}^2$ :: $\overline{GH}^2$: $\overline{gh}^2$, ші аша маї înколо.

Авем dap шірꙋл de рапортꙋрї GHA : gha :: GAB : gab :: GBC : gbc. Dap сꙋма антечеdenцілор se ape кътре а консеквенцелор, ка ꙋн антечеdent кътре консеквентꙋл съꙋ; каре не дꙋче съ zічем, къ полігонꙋл чел маре se ape кътре чел мік :: GHA : gha :: $\overline{GH}^2$: $\overline{gh}^2$; чеea че требꙋіа съ demonstръм.

Însemnape.

Пꙋтем dobedi tot întp'ачest кіп, къ перімeтpeле asemenea se аꙋ între еле ка латꙋреле омолоаце.

Королар.

Аша dap, de вом фаче пе челе треї латꙋре але ꙋнꙋї тріꙋнгю dpептꙋнгю лꙋате ка омолоаце, треї фігꙋрї asemenea, чеа dꙋпе іпотенꙋсъ ва фі екꙋалъ кꙋ сꙋма челор-лалте доъ. În adевър, ачеste треї фігꙋрї se аꙋ între еле ка пътрателе латꙋрелор омолоаце; ші ачеste пътрате sînt аst-фел, în кіт чел маї маре este екꙋал кꙋ сꙋма челор-лалте доъ. Аша dap чеа маї маре din ачеste фігꙋрї este еквівалентъ сꙋмеї челор-лалте доъ.

Ce веde къ пропрietatea însemnatъ a пътратȣлȣĭ іпotenȣseĭ este пȣмаĭ ȣп кas партікȣлар ал алteia маĭ џенерале.

Teorema XII. (Апл. 121, 122).

119. Sȣпрafeцеле черкȣрілор se аȣ între еле ка пътрателе разелор.

Dem. Fie R, R′ разеле a доъ черкȣрĭ; sȣпрафецеле лор вор fi репресентate прin πR^2 шi $\pi R'^2$; însъ din прічіна факторȣлȣĭ комȣн π, авем . . . $\pi R^2 : \pi R'^2 :: R^2 : R'^2$; чееа че demonstpeазъ teopema.

Însemnape.

Asemenea пȣtem ziче къ ачеste sȣпрafeце se аȣ între еле ка пътрателе diametрелор, saȣ ка пътрателе чірконферінцелор.

---

§ III. ПРОБЛЕМЕ ASПȢРА SȢПРАFЕЦЕЛОР.

Проблема I.

120. Съ префачем ȣн паралелограм saȣ ȣн тріȣнгіȣ într'ȣп пътрат еквівалент.

Solȣціе. Fie b, h, basȣл шi înълцimea паралелограмȣлȣĭ; съ лȣъm o medie пропорціоналъ x între b шi h, ачеаsta ва fi латȣра пътратȣлȣĭ еквівалент. În adевър, пътратȣл medieĭ este екал кȣ продȣктȣл estpemілор; însъ ачеаsta репресентъ sȣпрафаца дрептȣнгюлȣĭ.

Dака fiгꙋра че воim sъ îmпътръm este ꙋn tpi-ꙋпгїꙋ̆, воm лꙋа о medie întpe жꙋmътatea basꙋлꙋї шi înълцimea.

Însemпърї.

Mediea se поate detepmina saꙋ̆ џеоmetpiчеште (95), saꙋ̆ пpin калкꙋл. Fie ꙋn tpiꙋпгїꙋ̆ aвînd de чiнчї-спре-zече meтpe basꙋл шi de поъ înълцimea; воm авеа $\frac{15}{2} : x :: x : 9$; de ꙋnde $x^2 \times 67,50$, шi $x = \sqrt{67,50} = 8^m,2161$. Ачеаsta este лatꙋpa пътpatꙋлꙋї екꙋiвaлent.

Проблема II.

121. Пе о dpeaптъ datъ *a*, sъ fачем ꙋn dpeптꙋпгїꙋ̆ екꙋiвaлent кꙋ ꙋn dpeптꙋпгїꙋ̆ dat.

Soлꙋцie. Fie b, h, челе doъ dimensiї але dpeптꙋпгїꙋлꙋї dat. Sъ aflъm о а patpa пропорцiоналъ x întpe a, b, h; шi ачеаsta ва fi а doa dimensie а dpeптꙋпгїꙋлꙋї къꙋtat. În adeвър, daка $a : b :: h : x$... $a \times x = b \times h$; ачest din ꙋpmъ prodꙋkt este sꙋпpafaцa dpeптꙋпгїꙋлꙋї dat; шi чел d'întîїꙋ espimъ пе а dpeптꙋпгїꙋлꙋї кaре ва авеа a pentpꙋ bas шi x pentpꙋ înълцime.

Проблема III.

122. Sъ fачем ꙋn пътpat екꙋал кꙋ sꙋma saꙋ̆ difepinцa а doъ пътpate date.

Soлꙋцie. În casꙋл d'întîїꙋ, къ ꙋn ꙋпгїꙋ dpept кꙋ

латѕреле челор доъ пътрате date, ші dѕ іnotenѕsa; ачеаsta ва fi латѕра пътратѕлѕї къѕtat.

În kasѕл d'ал doiлеа (Fig. 99), fie A ші a латѕреле а доъ пътрате date. Fъ ѕn ѕnгїѕ dpent nedefinit, пе о латѕръ d'але кърѕіа, іа $BC = a$. Din пѕnktѕл C ка чеntpѕ ші кѕ о раzъ екѕалъ кѕ чеа maї ціаре латѕръ A, съ deskpim ѕn арк каре съ tae în пѕnktѕл D; BD ва fi латѕра пътратѕлѕї къѕtat; пеntpѕ къ авем $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = A^2 - a^2$.

Însemnape.

De am fi авѕt съ fачем ѕn пътрат екѕал кѕ sѕma maї шѕлtop natpate date, am fаче întiѕ ѕn пътрат екѕал кѕ доъ din ачestea; апої am компѕне пе ачеsta кѕ ѕn ал tpeiлеа; резѕлtatѕл кѕ ѕn ал патрѕлеа, ші аша maї înколо.

Проблема IV.

123. Съ fачем ѕn пътрат îndoit, întpeit, îmпътpit de kit ѕn пътрат dat.

Solѕціе. Am пѕtea deslега ачеаstъ проблешъ dѕпе însemnapea din пѕшърѕл пречеdent; dap кінѕл ѕрmътор este maї преferaбіл.

Съ sѕпѕнеш къ s'ap чере ѕn пътрат înчinчit de kit ѕn пътрат dat, а кърѕіа латѕръ este c, ші sѕпраfаца c^2. Bom лѕа о medie пропорціоналъ x întpe c ші 5c; ші ачеаsta ва fi латѕра пътратѕлѕї черѕt. În адевър, bom авеа $c : x :: x : 5c$; de ѕnde $x^2 = 5c^2$. Аша dap пътратѕл че ва авеа пе x de латѕръ ва прецѕі de чinчї орї sѕпраfаца датъ c^2.

Проблема. V.

124. Dîndѹ-se доъ полiгоане asemenea съ faчem ѹn ал treiлea екѹал кѹ sѹma saѹ кѹ diferinцa лор (Fig. 100).

Solѹцie. Кѹ доъ латѹре омолоаце d'але полiгоанелор date, съ faчem ѹn triѹнгiѹ, шi пе inoteнѹsa лѹi съ faчem o figѹръ asemenea кѹ ѹn полiгон dintр'aчestea; aчeasta ва fi figѹра кътtatъ (118, Кор.), de ва требѹi съ fie екѹал кѹ sѹma; se înцeлeцe че требѹе съ faчem пentрѹ diferinцъ.

Проблема VI.

125. Съ faчem ѹn пътrat каре съ se аiбъ кътре ѹн пatрат dat ка линiea *m* къ tре линiea *n* (Fig. 101).

Solѹцie. Съ лѹъm AI=*m*, IB=*n* шi пе sѹma лор ка diametрѹ, съ deskriem o semiчipkonferinцъ, шi съ apdiкъm în пѹнктѹл I o перпendiкѹларъ IG. Съ ѹnim GA, GB. Съ лѹъm GC екѹал кѹ латѹра пътratѹлѹi dat, шi съ дѹчem CD паралелъ ла diametрѹл; линiea GD ва fi латѹра пътratѹлѹi кътtat.

În adевър, авem GC : GD : : GA : GB; de ѹnde $\overline{GC}^2 : \overline{GD}^2 : : \overline{GA}^2 : \overline{GB}^2 : :$ AI : IB (114, Кор. 3). Аша dap $\overline{GC}^2 : \overline{GD}^2 : : m : n$. Аша dap, GC este латѹра пътratѹлѹi dat. Аша dap GD este латѹра пътratѹлѹi кътtat.

Проблема VII.

126. Съ faчem o figѹръ asemenea кѹ o figѹръ datъ P, шi каре съ se аiбъ кътре aчeastъ figѹръ : : *m*:*n*.

Solѹцie. Fie A o латѹръ a полiгonѹлѹi P. Кѹ-

tъm пріn пробlema пречеdenтъ, латȣра x а ȣnȣї пътрат каре съ se аїбъ кътре пътратȣл $A^2::m:n$, ші fачем пе x, konsidератъ ка омолоагъ лȣї A, ȣn полігон asemenea кȣ полігонȣл dat.

Пробlema VIII.

127. **Dînдȣ-se сȣma AB челор доъ dimensiї але ȣnȣї dреntȣnгіȣ, ші латȣра c а пътратȣлȣї еквівалеnt, съ deskрім dреtȣnгіȣл** (Fig. 102).

Solȣціе. Пе AB, ка diametрȣ, deskріе о semічірkonferінцъ; арdікъ $AD=c$; dȣ DG паралелъ кȣ AB, ші din ȣnȣл din челе доъ пȣнktȣрї de inтерsекціе G, спре eksemплȣ, кобоаръ пе GI перпеndікȣларъ пе diametрȣ. Челе доъ dimensiї але dреntȣnгіȣлȣї вор fi AI ші IB.

În adeвър, $AI \times IB = \overline{GI}^2 = \overline{AD}^2$. Dреntȣnгіȣл este dар еквівалеnt кȣ пътратȣл dat. Se веde къ трεбȣе, ка съ se поатъ fаче пробlema, c съ нȣ ковіршеаскъ раza, саȣ жȣмътаtea сȣmеї латȣрелор dреntȣnгіȣлȣї. Kînd авем $c=\frac{AB}{2}$, паралела ажȣnџе тanџentъ, ші челе доъ латȣре але dреntȣnгіȣлȣї sînt fie-каре еkȣалъ кȣ жȣмътаtea сȣmеї лор. Însъ, este îmbedepat къ înтр'ачest kas пътратȣл este чел маї маре че se поаte. Аша dар, din тоаte dреntȣnгіȣріле че пȣтem fаче кȣ о ачееаші сȣmъ de латȣре, чел маї маре este ачела каре аре латȣреле лȣї еkȣале, саȣ алтfел, este пътратȣл а кърȣіа латȣръ este еkȣалъ кȣ жȣмътаtea сȣmеї.

Проблема IX.

128. Dindꙋ-se diferinца AB a латꙋрелор ꙋнꙋї dreптꙋнгiꙋ, шi латꙋра c а пътратꙋлꙋї еквiвалент, съ deskрim dreптꙋнгiꙋл.

Solꙋцie. Пе AB, ка diametrꙋ, deskрie о semiчiрконферинцъ. Ардiкъ $AD=c$ (Fig 103); шi прin чentrꙋл O dꙋ DOH. Латꙋреле кътате sînt DG, DH. În adевър, авem (86)... DG : DA : : DA : DH; de ꙋnde $DG \times DH = \overline{DA}^2 = c^2$. Шi înкъ, DG шi DH аꙋ пentrꙋ diferinцъ diametrꙋл $GH = AB$; аша dар ачесte доъ лiniї împлinesk черереа.

Проблема X.

129. Съ префачем ꙋн полiгон întр'ꙋн triꙋнгiꙋ еквiвалент (Fig. 104).

Solꙋцie. Fie ABCDGH полiгонꙋл dat. Съ dꙋчem о diagonaлъ AH каре ва desпърцi triꙋнгiꙋл AKH; съ dꙋчem Km, паралелъ ла diagonaлъ, шi съ ꙋnim mH. Triꙋнгiꙋл adъogat mKH este еквiвалent кꙋ triꙋнгiꙋл skos AKH; пentrꙋ къ аꙋ ачелашї бas AH, шi ачееашї înълцiше, fiind къ вiрfꙋл лор K, m, se afлъ пе о ачееашї паралелъ ла бas. Аша dар, sꙋбt о алтъ formъ, полiгонꙋл пъstreaзъ sꙋпрafaца sa, шi este лesne de кꙋnoskꙋt къ аре ꙋн ꙋнгiꙋ maї пꙋцiн, adiкъ ꙋнгiꙋл K; în време че ꙋнгiꙋл m нꙋ faче алт de кît рamплaseaзъ пе ꙋнгiꙋл A.

Пꙋtem, прintр'о asemenea операцie, съ skoatem ꙋн ал doiлea ꙋнгiꙋ, шi аша maї înколо, пiнъ ва ръminea нꙋmaї treї. Se веde dар къ полiгонꙋл dreпtлiniat se поate префаче întр'ꙋн triꙋнгiꙋ, шi прin ꙋрmare întр'ꙋн пътрat; аша пꙋtem faче пътрътꙋра тꙋtꙋлор figꙋрелор dreпt-лiniate.

ПАРТЕ А ТРЕІА.

---

§ I. ПЛАNȢРЇ, SȢПРАFЕЦЕ, ТРȢПȢРЇ КОNSIDЕРАТЕ РЕЛАТІВ ЛА ПОSIЦІЛЕ ЛОР ІN SПАЦІȢ.

Апл. 17-19-123-125, ші Апл. 15-172-11-213.

Definiцiї.

130. Zічеш къ о dреаптъ este перпеndікȣларъ пе ȣп план, кînd еа este перпеndікȣларъ пе toate dрепtеле че tрек прin піціорȣл съȣ în план.

Еа este параленъ ла ȣп план кînd, прелȣнцitъ neтърцinit, нȣ'л ва пȣtеа întîлні. Доъ планȣрі sînt паралеле întре еле, кînd îmплinesк ачееашї коndiцie.

Este demonstрat (131) къ intерsекціеа а dоъ планȣрї este о лinie dреаптъ. Дȣпе ачеаsta, нȣmim ȣнгіȣ а dоъ планȣрї, кîtimea maї mȣлt saȣ maї пȣцin mаре кȣ каре sînt deпърtate ȣнȣл de алtȣл. De не вом înкіпȣі къ ачеste планȣрї se înвîрtesк îmпрежȣрȣл dрепtеї de intерsекціе ка вълȣг, este înвedeрат къ ачеаstъ miшкаре ва fi identікъ кȣ ачееа а dоъ dрепte ашъzate în ачеste dоъ планȣрї, ші перпеndікȣларе ла ȣн ачелашї пȣнкt ал intерsекціі лор. Аша, ȣнгіȣл fорmat de ачеste dоъ перпеndікȣларе треᲈȣе съ fie mъсȣра ȣнгіȣлȣї fорmat de ачеste dоъ планȣрї. Чееа че вом demonstра maї tîрziȣ (*n*° 136). Ȣнгіȣл fорmat de dоъ планȣрї se нȣmeште ші ȣнгіȣ d i e d р ȣ.

Se înцелеџе în че кas внгвл diedpв este askвцit, dpeпt saв oпtвs; de este dpeпt, челе doъ планврї se пвmesк перпендiквларе întpe еле.

Nвmim внгiв solid, spaцiвл копpins sвбt maї mвлte плане че se внеsк întp'вп пвпкt. Требве чел пвцiп tpeї планврї ка sъ se фakъ вп внгiв solid. Dpeпtеле în каре se tae планврiле че фак вп внгiв diedpв saв solid, konsidepate пe din афаръ ка ръsъpite, se пвmesк коаme; înъвntpв, еле sint вpmеле планврiлор вnopa asвпpa алtора.

Вpmeaзъ din definiцiiле линii dpeпte шi a планвлвї, къ o dpeaпtъ пв поate fi парte întp'вп план, парte афаръ din план; asemenea, doъ плане пв пot în парte пвmaї sъ se kotponeaskъ.

Teorema I. (idem).

131. Intepsekцiea a doъ планврї este o линie dpeaпtъ; intepsekцia a tpeї планврї este вп пвпкt.

Dem. 1° Intepsekцiea este o линie dpeaпtъ saв кврбъ. Daka пpin doъ пвпкtвpї але ачесtеї intepsekцiї, вом двче o dpeaпtъ, еa ва fi негpешit în фie-каре dintp'ачесte doъ планврї, пentpв къ tpeче пpin doъ пвпкtвpї але фie-кървia dintp'ачесte планврї; шi, daka еa este în amindoъ планврiле, пв поate fi de kit кеар intepsekцiea лор. Aша dap, 1°, ш ч л.

În kit пentpв intepsekцiea a tpeї планврї, еa пв este алt de kit intepsekцiea планвлвї d'ал tpeiлea кв dpeaпta че фаче intepsekцiea челор doъ d'întiв. Aша

dap, intepsekцieа ѕпеĭ dpente ші а ѕпѕĭ план este înbedepat ѕп пѕпkt. Аша dap, 2° ш ч л.

Теорема II. (idem).

132. **Доъ dpente че se tae sînt întp'ачелаш план, ші îĭ хотъpъsk позiцiea.**

Dem. De не вом înkiпѕi ѕп план tpekînd пpin ѕпа din aчeste dpente ші înвîptindѕ-se împpежѕpѕл eĭ, ва întîлni în sfîpшit пе чеа d'ал doiлea, чел пѕцin întp'ѕп пѕпkt. Îndatъ, ел о ва копpinde întpeагъ, пentpѕ къ копpinde доъ din пѕпktѕpiле sале, adiкъ пе чел din ѕpmъ, ші intepsekцieа а челоp доъ dpente; аша dap aчeste доъ dpente sînt întp'ѕпѕл ші ачелашĭ план, ші înкъ, позiцiea sa este înвedepat fiksatъ de еле.

Королар.

1° Аша dap ѕп tpiѕпгiѕ̆ хотъpаште позiцiea ѕпѕĭ план. Asemenea este ші кѕ tpeĭ пѕпktѕpĭ че пѕ sînt în лiniе dpeaптъ пentpѕ къ еле fak ѕп tpiѕпгiѕ̆.

2° Asemenea este ші кѕ доъ паралеле; пentpѕ къ dѕпъ definiцieа лоp еле sînt întp'ѕпѕл ші ачелашĭ план, ші оp-каpe алт план че вом adѕче пpin aчeste доъ лiniĭ, kotponind în паpte пе чел d'întîiѕ̆, tpeвѕe sъ'л kotponeaskъ пeste tot. Аша dap доъ паралеле хотъpъsk позiцiea ѕпѕĭ план.

Теорема III. (Апл. 124 ші idem).

133. **О dpeaптъ пepпendiкѕлаpъ ла алte доъ че tpek пpin пiчiоpѕл sъѕ̆ în-**

tp'ɤn план, este перпendiкɤларъ пе ор-каре алtъ dpeantъ че ва tpeче прin пiчiорɤл sъɤ̆ întp'aчest план, шi прin ɤpmape, este перпendiкɤларъ пе план. (Fig. 105).

Dem. Fie AP перпendiкɤларъ ла doъ dpente PB, PD, че tpeк прin пiчiорɤл sъɤ̆; ziк къ еа ва fi перпendiкɤларъ пе ор-че алtъ dpeantъ PC каре ар tpeче iap прin пiчiорɤл перпendiкɤларeĭ. Къчĭ, daка прintp'ɤn пɤnkt оаре-каре C, вот dɤче о dpeantъ BCD копрinsъ întpe латɤреле ɤnгюлɤĭ BPD, шi împърцitъ în пɤnktɤл C în пърцĭ екɤале (93); вот ɤni пɤnktɤл A кɤ челе tpeĭ пɤnktɤpĭ B, C, D; вот прелɤнџi пе AP de о kîtime PQ=AP, шi вот ɤni шi пɤnktɤл Q кɤ челе-лалtе tpeĭ пɤnktɤpĭ B, C, D; вот авеа doъ tpiɤnгюpĭ ABD, QBD, екɤале, ка ɤнеле че аɤ̆ челе tpeĭ латɤре екɤале, adiкъ: BD комɤнъ; AB=BQ ка обliче d'о notpiвъ denъptate de пiчiорɤл P ал перпendiкɤларeĭ BP; шi AD=DQ пentpɤ ачелашĭ кɤвint. Аша dap aчeste doъ tpiɤnгe se вор котponi прin sɤпрапɤнере. Аша dap челе doъ dpente AC, QC, каре ɤnesk вîpfɤpiле кɤ miжлокɤл C ал басɤлɤĭ комɤн, se вор kotponi; dap aчeste doъ обliче екɤале sînt d'о notpiвъ denъptate de пɤnktɤл P, пentpɤ къ PQ=AP. Аша dap, CP este перпendiкɤларъ пе AP; чееа че tpeбɤia sъ demonstpъm.

Теорема IV. (id).

134. Fie AP о перпendiкɤларъ пе планɤл MN, шi BD о dpeantъ оаре-каре ашеzatъ în план, daка din пɤnktɤл P вот ко-

ворі PC перпеndікȣларъ пе BD, ші вом ȣні AC, ачеastъ din ȣрмъ dреаптъ ва fi ші еа перпеndікȣларъ пе BD (Fig. 105).

Dem. Sъ лȣъm dȣпе вое CB=CD, ші sъ ȣnim PB, PD, AB, AD; челе doъ tрiȣнгіȣрі PBC, PCD sînt екȣале, ка dрепtȣнге în C авînd о лаtȣръ PC комȣпъ, ші BC=CD din конstрȣкціе. Аша dар, PB=PD. Аша dар, челе doъ tрiȣнгіȣрі APB, APD, dрепtȣнге în P, sînt іаръші екȣале, пепtрȣ къ аȣ, аfаръ de ȣнгіȣл dрепt ші о лаtȣръ комȣпъ AP, лаtȣра PB=PD. Аша dар AB=AD. Dар ачеste doъ обліче екȣале sînt d'о potрівъ depърtate de пȣпкtȣл C; аша dар ачеst пȣпкt este пічіорȣл перпеndікȣларей; аша dар dреапtа AC este перпеndікȣларъ пе BD. Аша dар, шчл.

Королар.

Dреапtа BC, перпеndікȣларъ ла doъ dрепte AC, PC, este перпеndікȣларъ пе планȣл formаt de ачеste doъ dрепte.

Însemпърі.

Ліпііле AP, BD daȣ екsemплȣ а doъ dрепte каре пȣ se вор пȣtеа întîлпі, ші каре кȣ toаte ачеstеа пȣ sînt параллеле, пепtрȣ къ пȣ sînt tot întр'ȣп план. Комȣпа перпеndікȣларъ PC este distanца лор чеа маі sкȣрtъ; къчі ор-каре алtъ dреапtъ AB dȣsъ întре doъ пȣпкtȣрі оаре-каре, este маі лȣпгъ de кît AC; dар AC este маі лȣпгъ de кît PC, ка облікъ пе AP. Аша dар, шчл.

Челе doъ dрепte AP, BD, кȣ toаte къ пȣ se întîлпеsк, se sокоtеsк ка formînd ȣп ȣнгіȣ; ші аічі а-

чest ѕнгiѕ este dpent. Înцелецеш кѕ ѕнгiѕл ачestop doъ лiнiї пе ачела пе каре îл fopmeazъ ѕна din еле BD, ѕпре екеmплѕ, кѕ о паралелъ ла чеа-лалtъ dѕсъ прin пѕнкtѕл D. Se bede къ în ценерал аiчї sînt doъ ѕнгiѕрї алътѕрate.

Teorema V. (id.)

135. 1° Прiнtр'ѕн пѕнкт dat пѕtem dѕче нѕmаї о перпендiкѕларъ ла ѕн план. 2° Облiчеле екѕале sînt d'o потрiвъ депърtate de пiчiорѕл перпендiкѕларeї. 3° Дака облiчеле нѕ sînt d'o потрiвъ депърtate, чеа маї депърtatъ este чеа маї лѕнгъ.

Ачeste diferite пропosiцiї se demonstpeazъ întр'ѕн кiп кѕ totѕл аналог кѕ пропosiцiiле кореспѕнzъtoape asѕпра лiнiiлор dpente; de ачеea шi ноï tpimitem аколо пе чititopѕл nostpѕ.

Teorema VI. (id.)

136. Ѕн ѕнгiѕ diedpѕ аре de мъсѕръ ѕнгiѕл fopmat de doъ перпендiкѕларе apdiкate în челе doъ планѕрї ла ѕн ачелашї пѕнкt ал intepsекцiї лор комѕне.

Dem. Din ѕнiformitatea сѕпрафецiї плане, ѕрmeazъ întîiѕ къ în ор-каре пѕнкt ал intepsекцiї вом apdiка челе doъ перпендiкѕларе, ѕнгiѕл лор ва fi tot d'aѕна ачелашї. Dѕпъ ачeasta:

Fie (Fig. 107) doъ планѕрї а кърора intepsекцie este AP, шi съ dѕчem ла ачeastъ intepsекцie ѕн

план перпендікꙋлар; еа ва fi перпендікꙋларъ ла челе доъ дрепте PC, PD, каре sînt intepsекціile планꙋлꙋї перпендікꙋлар кꙋ челе доъ планꙋрї каре fак ꙋнгіꙋл діедрꙋ. De вом îmпърці ꙋнгіꙋл CBD intр'ꙋn нꙋмър оаре-каре de ꙋнгіꙋрї пlане екꙋале, ші дака пріn ліпііле de îmпърціре ші intepsекціеа AP, вом дꙋче atîtea планꙋрї, вом авеа ꙋn оаре-каре нꙋмър de ꙋнгіꙋрї діедре а кърор identitate este îmведератъ; аst-fел în кît дака ꙋнгіꙋл челор доъ перпендікꙋларе este îmпърціт în кîте-ва пърці екꙋале, ꙋнгіꙋл діедрꙋ totал ва fi ші ел tot intр'atîtea пърці îmпърціt; віче верsa este îmведератъ.

Dꙋпе ачеаsta, вом demonstpa къ ꙋнгіꙋл план fъкꙋt de челе доъ перпендікꙋларе este мъsꙋра ꙋнгіꙋлꙋї діедрꙋ, tot кꙋ ачел раціонament кꙋ каре нě am sлꙋжіt ка sъ dobedim къ аркꙋл este мъsꙋра ꙋнгіꙋлꙋї ла чеntpꙋл.

Teorema VII. (id.)

137. Дака о дреантъ AP (Fig. 106) este перпендікꙋларъ пе ꙋn план MN, ор-че план ва tрече пріn ачеаstъ дреантъ ва fi ші ел перпендікꙋлар ла планꙋл MN.

Dem. Fie BC intepsекціеа челор доъ планꙋрї. Sъ арdікъм în пꙋнкtꙋл P în планꙋл MN о перпендікꙋларъ ла BC. Fie PD ачеаstъ перпендікꙋларъ; еа ва fаче кꙋ AP ꙋn ꙋнгіꙋ дрепt în P, пеntpꙋ къ AP este перпендікꙋларъ пе планꙋл MN (n°. 133). Dар ачеst ꙋнгіꙋ este мъsꙋра ꙋнгіꙋлꙋї челор доъ планꙋрї (n°. 136). Аша дар планꙋл че tрече пріn AP este перпендікꙋлар ла планꙋл MN.

Дрепte шi планврĭ паралеле ла алtе планврi.

Теоrема IX.

139. Дака doъ планврĭ паралеле se tae прintр'вn план sекаnt, вnгiврiле алtерne шi коresпвnzînde вор fi еквале; планврiле паралеле вор fi пretвtindinea d'o пotрiвъ deпъртate; вnгiврiле diedре formate de планврĭ паралеле вор fi еквале; în sfîршiт, doъ планврĭ паралеле ла вn ал trеiлеa вор fi паралеле întре еле.

Toate ачеste проnрietъцĭ se demonstreazъ tot кв кinвл лiniiлор dрепte.

Теоrема X.

140. Ор-че dреanтъ паралелъ ла о алtъ dреanтъ ашеzatъ întр'вn план este паралелъ ла ачеst план.

Dem. Челе doъ паралеле хotъръsк вn план а кървia врmъ пе планвл dat nв este alt de kit dреanta ашеzatъ întр'ачеst план. Дака dреanta esteрnъ ар пвtеa intiлni планвл, ачеastъ intiлnire nв s'ар пвtеa fаче de kit întр'вn пвnкt ал врmеĭ планвлвĭ че еа fаче кв паралела sa; аша dар еа ва intiлni пе ачеаsta; чееа че este абsврd. Аша dар еа este паралелъ ла план.

Теоrема XI. (id.)

141. Intерsекцiiле а doъ планврĭ па-

ралеле printр'ън ал treiлea sînt dpenle параленe.

Dem. Дака еле ap fi пъtъt съ se întîлneaskъ, челе doъ планъpî параленe în каре se afлъ еле s'ap întîлni asemenea; чееа че este neste пъtinцъ. Аша dap ачеste лiniî nъ se пot întîлni. Аша dap еле sînt параленe.

Теорема XII. (id.)

142. Дака doъ dpenle sînt тъiate prin treî планъpî паралеле, еле вор fi тъiate în пърцî пропорцiонале (Fig. 108).

Dem. Fie челе doъ dpenle AB, CD, ашеzate în diferite планъpî; съ ъnim estpemitъцiле лор prin dpenteле BC, AD, шi съ дъчем AC, каре ва fi intepsекцiеа челор doъ планъpî, în каре se afлъ челе doъ dpenle.

Fie, GO, OH ъpmeле ачеstop doъ планъpî пе планъл intepmediъ каре ле тае; еле вор fi pesпекtiв параленe ла BC, AD, пентръ къ ачеste din ъpmъ dpenle sînt intepsекцiiле а doъ планъpî паралеле къ планъл intepmediъ че тае prin fie-каре din челе doъ планъpî în каре se afлъ челе doъ dpenle date. Вом авеа dap întpe ачеste планъpî pesпекtiве пропорцiiле ъpmътоаре:

AG : GB : : AO : OC; шi DH : CH : : AO : OC; de ъnde, din причiна рапортълъî комън, AO : OC .... AG : GB : : DH : CH. Чееа че требъia съ demonstpъm.

143. Noî лъсъm пе seama читiторiлор a demonstpa пропосiцiiле ъpmътоаре:

1° Дака о dpeantъ este перпендiкъ-

ларъ пе ꙋп план, ор-че паралелъ ла ачеаstъ dреаптъ ва fi перпенdікꙋларъ ла план, шi în речіпрокъ;

2° Доъ плане перпенdікꙋларе ла о ачееашї dреаптъ sînt паралеле întре еле;

3° О dреаптъ перпенdікꙋларъ ла ꙋп план este перпенdікꙋларъ пе ор-че план паралел;

4° Паралеле конпрinse întре планꙋрї паралеле sînt екꙋале;

5° Доъ ꙋнгіꙋрї каре аў латꙋреле лор паралеле sînt екꙋале, шi планꙋріле лор sînt паралеле.

Теорема XIII.

144. Întр'ꙋп ꙋнгіў solid tрiеdрꙋ, ꙋп ꙋнгіў ор-каре din треї ꙋнгіꙋрї плане este маї шік de кît sꙋма челор-лалtе dоъ.

Dem. Fie (Fig. 109) ASB чеа маї маре din челе треї феце але ꙋнгіꙋлꙋї tрiеdрꙋ. Съ dꙋчем о dреаптъ SD, ast-фел în кît съ авем ꙋнгіꙋл ASD=ASC; dꙋпъ ачеаsta съ dꙋчем о трансверsалъ оаре-каре AB, каре съ tае пе AD întр'ꙋн пꙋнкt I. Съ лꙋъm пе SC=SI, шi съ ꙋnim CA, CB. Челе dоъ трiꙋнгіꙋрї ASC, ASI sînt екꙋале; пентрꙋ къ аў ꙋн ꙋнгіў екꙋал din конstрꙋкціе; SC=SI, шi AS este комꙋн: аша dар AC=AI. Dар în трiꙋнгіꙋл ABC, авем AB<AC+BC; аша dар, fiind къ AI=AC, ръmîне BI<BC. Аша dар, în трiꙋнгіꙋріле BSC, BSI, каре аў dоъ латꙋре екꙋале ꙋна алtеіа, а треіа латꙋръ BC а ꙋнꙋіа fiind маї маре de кît а треіа латꙋръ BI а

челві-лалт, вngюл BSC опвs челеї d'întîю требве sъ fie maї mape (n°. 17) de kît вngюл BSI опвs челеї d'ал doiлеа. Аша dap sвma челор doъ вngюрї BSC, CSA, este maї mape de kît чел d'ал treiлеа ABS.

Teorema XIV.

145. **Întp'вn вngiю solid oape-кape, sвma tвtвлор вngiвpiлор ла вîpf este maї mikъ de kît патрв вngiвpї dpeпte.**

Dem. Fie S вngюл solid (Fig. 110). Sъ'л tъem npintp'вn план кape determinъ o sekцie полігоналъ ABCDG, ші dintp'вn пвnkt oape-кape O, d'інъвntpвл полігонвлвї, sъ двчеш dpeпte ла deosebiteле вîpfвpї A, B, C, D, G. Fie-кape dintp'acesteвîpfвpї se face atвnчї вîpfвл внвї tpiвngiю tpiedpв, în кape внвл din вngюpiле плане ABC este maї mik de kît sвma челор-лалте doъ ABS+CBS. Аша dap sвma tвtвлор вngюpiлор de ла бas, în tpiвngюpiле кape aв вîpfвpiле лор în S, este maї mape de kît sвma tвtвлор вngюpiлор ла бas, în tpiвngюpiле кape aв вîpfвpiле лор în O. Aчеste doъ sвme de tpiвngюpї fiind еквале în нвmъp, sвma totaлъ a tвtвлор вngюpiлор лор este aчееашї; ші fiind къ sвma d'întîю ape вngюpiле maї mapї ла бas, тpeбвe, npin kompensaцie, ка a doa sъ fie maї mape ла вngюpiле de ла вîpf. Аша dap sвma вngюpiлор în O este maї mape de kît sвma вngюpiлор în S. Dap чеа d'întîю este еквалъ кв патрв вngюpї dpeпte. Аша dap чеа d'ал doiлеа este maї mikъ. Чееа че tpeбвia sъ demonstpъm.

Teorema XV.

146. Daka doъ ȣnгȣipĭ tpiedpe S, S′ (Fig. 111) aȣ̆ чeлe tpeĭ ȣnгiȣpĭ плane aлe лop eкȣaлe ȣnȣл altȣia, inклinapea a doъ feцe oape-кape dintp'ȣnȣл ва fi eкȣaлъ кȣ inклinapea чeлop doъ feцe кópesпȣnzъtoape din чeл-лaлt.

Dem. Fie SA intepsekцiea a doъ feцe S′A′ omoлoaгa sa. Sъ лȣъm dȣпe вoe ȣn пȣnкt I, шi sъ apdiкъm intp'aчest пȣnкt, in чeлe doъ feцe, doъ пepпendiкȣлape IB, IC. Пpin aлt пȣnкt A, лȣat dȣпъ вoe, sъ dȣчem doъ dpeпte oape-кape ABD, ACG, пȣmaĭ кȣ aчeste kondiцiĭ кa sъ tae пepпendiкȣлapeлe, шi sъ intiлneaskъ dȣnцiлe SV, SU. Sъ ȣnim GD шi CB. Sъ fachem aчeлeaшĭ konstpȣкцiĭ in ȣnгiȣл S′, лȣind S′I′ = SI, I′A′ = IA, ȣnгiȣл S′A′D′ = SAD, шi S′A′G′ = SAG.

Bom aвea tpiȣnгiȣл AIB = A′I′B′; пentpȣ къ IA = I′A′; ȣnгiȣpiлe I, I′ sint dpeпte, шi ȣnгiȣpiлe A, A′ sint eкȣaлe. Tpiȣnгiȣpiлe AIC, A′I′C′ sint eкȣaлe tot пentpȣ aчeлaшĭ кȣвint. Aшa dap AB = A′B′, AC = A′C′. Inкъ tpiȣnгiȣpiлe SAD, S′A′D′ sint eкȣaлe кa aвind o лatȣpъ eкȣaлъ SA = S′A′ кoпpinsъ intpe ȣnгiȣpĭ eкȣaлe ȣnȣл altȣia: aшa dap вom aвea шi SD = S′D′, шi пentpȣ aчeлaшĭ кȣвint SG = S′G′. Aшa dap tpiȣnгiȣpiлe DSG, D′S′G′ aȣ̆ doъ лatȣpe eкȣaлe кoпpinzind ȣn ȣnгiȣ eкȣaл; пentpȣ къ ȣnгiȣpiлe in S шi S′ sint eкȣaлe пpin inotes. Aшa dap aчeste doъ tpiȣnгiȣpĭ sint eкȣaлe. Aшa dap GD = G′D′. Aшa dap шi tpiȣnгiȣpiлe GAD, G′A′D′ sint eкȣaлe кa aвind tpeĭ лatȣpe eкȣaлe ȣna alteia dȣпe чeea чe пpeчede. Aшa dap

ѹнгiѹрiле лор în A шi A′ sînt екѹале. Аша dар челе doъ tрiѹнгiѹрї CAB, C′A′B′ аѹ ѹн ѹнгiѹ екѹал (A=A′) копрins întре doъ латѹре екѹале ѹна алteia; аша dар еле sînt екѹале; аша dар BC=B′C′. De ѹнde ѹрмеазъ къ челе doъ tрiѹнгiѹрї CIB, C′I′B′ аѹ челе tреї латѹре екѹале; аша dар ѹнгiѹрiле лор I, I′ sînt екѹале. Dар прin konstрѹкцie, ачеste ѹнгiѹрї sînt мъсѹра ѹнгiѹрiлор tрiеdре каре аѹ пеntрѹ dѹнцї SA, S′A′. Чееа че demonstреазъ пропосiцiеа postitъ.

Sхолiе.

Dака dispѹнереа феcелор омолоаце este întр'ачелашї sens, ѹнгiѹрiле солide se пот sѹпрапѹне. În касѹл контрарiѹ, ѹнгiѹрiле diedре sînt iаръшї екѹале; dар ѹнгiѹрiле солide нѹ se пот sѹпрапѹне. Atѹнчї еле se нѹmesk **ѹнгiѹрї simetрiче.**

---

§ I. МЪSѸРА SѸПРАFЕЦЕЛОР ТРѸПѸРIЛОР, DЕОSЕБIТЕЛЕ FЕЛѸРЇ DЕ SОЛIDЕ.

Definiцiї.

147. Нѹmim **полiеdрѹ** ор-че солid tерminат de феце плане. Треї плане фак ѹн ѹнгiѹ солid; не tребѹе ка sъ'л înкidem ѹн ал патрѹлеа план. Чел маї simплѹ dintре полiеdре аре dар патрѹ феце; îл нѹmesk **tеtраеdрѹ**. Se înцелеце че însemneазъ zічерiле пеntаеdрѹ, ексаеdрѹ, шчл.

Нѹшim **Прismъ** (Fig. 112) ѹн солid копрins întре doъ басѹрї, каре sînt полiгоане екѹале шi па-

ралеле ѕnite printр’о ѕѕпрафацъ латералъ компѕѕъ de паралелограме.

Înълцimea ѕпеĭ prisme este перпендікѕлара dѕѕъ între челе доъ басѕрĭ.

Prisma este d r e a п t ъ kînd dѕпціле sале sînt перпендікѕларе пе планѕріле басѕрілор sале. În касѕл контраріѕ, еа este о б л і к ъ.

Prisma este регѕлатъ, kînd este dреаптъ, ші аре de басѕрĭ полігоапе регѕлате. În касѕл ачеsta, dреапта че tрече прin чеntрѕріле челор доъ басѕрĭ se пѕмеште а к s ѕ л prismeĭ.

О prismъ este tріѕпгюларъ, patрѕпгюларъ, пеп-tапгопалъ, екsагопалъ, dѕпе кѕm ĭĭ este басѕл ѕп tріѕпгіѕ, saѕ ѕп patрѕлаtѕр, saѕ ѕп пеntагоп, шчл.

Nѕmim п а р а л е л і п і п е d (Fig. 113, 122), о prismъ каре аре de бас ѕп паралелограm. Ачеst solid dар se копріnde de шеаse паралелограме. Ел se пѕмеште d р е п t ѕ п г і ѕ kînd toate feцеле sале sînt dрепtѕпге.

Dintре паралелініпеdеле dрепtѕпге se deosiбеште к ѕ б ѕ л, saѕ екsaedрѕл регѕлаt, але кърѕіа челе шеаse feце sînt пътраtе екѕале (Fig. 124).

П і р а m і d а este solidѕл каре резѕлтъ din ѕпі-реа ѕпѕĭ пѕпкt S (Fig. 114) лѕаt афаръ din планѕл ѕпѕĭ полігоп, кѕ deoseбітеле вîрфѕрĭ але ачеstѕĭ полігоп, прin dрепtеле SA, SB, SC, SD, SG, каре фак atîtea tріѕпгюрĭ în sпацiѕ kîte латѕре аре полігопѕл. Тріѕпгюріле аѕ вîрфѕріле лор în пѕпкtѕл S, каре se пѕмеште в î р ф ѕ л пірамідеĭ; полігопѕл ABCDG ĭĭ este басѕл.

Î п ъ л ц і m е а пірамідеĭ este перпендікѕлара ко-

борîtъ din вîрfвл съв пе планвл басвлві съв; поate къdea афаръ din ачest бас.

Пiрamida este тріюнгюларъ, patрвнгюларъ, шчл., tot în касвріле în каре este ші пrisma. Nвmim пiрamidъ регвлатъ пе ачееа каре аре de бас вн полігon регвлат, ші а кървіа înълціше каde ексакт în чентрвл полігонвлві. Înълцimea se нвмеште атвнчі аксвл пірамідеі.

Doъ пірамide sînt asemenea кînd ав toate dimensiiле лор омолоаце пропорціонале. Întр'ачest кас toate поліedреле sînt asemenea.

Nвmim поліеdре simetpiче doъ поліеdре каре, авînd вн бас комвн, sînt fъквte tot întр'вн кіп de amîndoъ пърціле опвse але ачеств бас. În касвл ачеsta, вîрfвріле внгюрілор омолоаце se афлъ d'опotрівъ depърtate de планвл басвлві, пе о ачееаші перпендікваръ ла ачest план. Dака вн поліеdрв s'ар афла кв о фацъ d'але sале пе о огліndъ, кіпвл съв din огліndъ ва fi поліеdрвл съв simetpiк.

Nвmim чiліndрв (Fig. 115) solidвл пъsквt din револвціеа внві dрептвнгю ímпрежврвл внеі латвре d'але sале; ачеasta se нвмеште атвнчі аксвл чіліndрвлві. Este леsne a квноаште în чіліndрв о прismъ кв басвл чірквлар.

Este invedepat къ ор-че секціе fъквтъ întр'вн чіліndрв паралел кв басвл съв este вн черк еквал кв dînsвл, ші къ ор-че секціе fъквtъ în лвнгвл аксвлві este вн dрептвнгю îndoit de dрептвнгювл пъскътор.

Конвл (Fig. 116) este solidвл пъsквt din револвціеа внві тріюнгю dрептвнгю ímпрежврвл внеі латвре d'але sале, каре este атвнчі аксвл solidвлві.

Ачеsta аре de бas ѕn черк; пѕнktѕл S ії este вîрfѕл, шi лiniea оаре-каре SB, каре este ѕna din поsiціiле іпоtenѕseї în fормареа sѕпрafeцеї коniче, se пѕмеште а п о t е m а saѕ̆ п ъ s к ъ t о а р е а копѕлѕї.

Ор-че sекціе фъкѕтъ паралелъ ла бas este ѕn черк; шi ор-че sекціе fъкѕtъ în лѕнгѕл аksѕлѕї este ѕn tрiѕнгiѕ̆ isosчел îndoit de кît tрiѕнгiѕл пъsкъtор. (Апл. 128).

De вом desпърці прintр'ѕn план паралел ла бas копѕл sѕперіор saѕ̆ (Fig. 117), чееа че ръмîне din solid se пѕмеште к о п t р ѕ н к і а t saѕ̆ t р ѕ н к і ѕ̆ d е к о п. Se înцелеце че пѕмiм бasѕл, înълцimea шi апоtema tрѕнкiѕлѕї de коп.

Nѕмim s f е р ъ, solidѕл пъskѕt din револѕціea ѕпѕї semiчерк împрежѕрѕл diametрѕлѕї sъѕ̆. Este înвedepat къ toate пѕнktѕріле sѕпрafeцеї sînt d'оnotрiвъ depъртate de чеntрѕл черкѕлѕї пъsкъtор, каре аре ачелаші чеntрѕ шi ачееаші разъ кѕ sfeра (Fig. 118).

Ор-че sекціе а sfeреї фъкѕтъ în лѕнгѕл diametрѕлѕї este ѕn черк еквал кѕ черкѕл пъsкъtор. Ор-че алтъ sекціе ва fi tot черк; пеntрѕ къ toate пѕнktѕріле fiind d'о notрiвъ depъртate de чеntрѕл sfeреї, ва fi бasѕл ѕпѕї коп каре ва авеа вîрfѕл sъѕ̆ în чеntрѕл. Ор-че sекціе каре п'аре de чеntрѕ чеntрѕл sfeреї este ѕn ч е р к m і к; este ч е р к m а р е кînd тречe прin чеntрѕл. Toate черкѕріле mарї se tae пе ѕn diametрѕ în пърці еквале. (Апл. 133—134).

Nѕmim z о п ъ, о parte а sѕпрafeціі sfeреї копріпsъ întpe doъ sекціі паралеле. Solidѕл копрins de zопъ este ѕn s е г m е n t s f е р і к.

Партea sвпрafeцiї sfepiї копрinsъ sвбt вn план tъind чева, este o zonъ кв вn бas, saў калот sfepiк.

Fвsвл sfepiк este партea sвпрafeцiї sfepeї кокопрinsъ între доъ черкврї тарї. Soлidвл ла каре fвsвл sлвжеште de бas, este вn впгet sfepiк.

Sекторвл sfepiк este solidвл пъsквt din miшкареа внвї sектор чiрквлар împрежврвл внеia din разеле sале. Ел este компвs de вn кon шi de вn segment sfepiк кв вn бas.

Fiгвреле fъквte пе sвпрafaцa sfepeї de арквpї de черкврї тарї sînt полiгоане sfepiче.

Дака sfepa se sокотеште îmвîptindв-se împрежврвл внвia din diameтреле sале, ачеsta ва fi аксвл, шi estpemiтъцiле вор fi полврiле sfepeї..

În sfîpшit, вn план se нвмеште таnцent ла sfepъ, кînd аре нвmaї вn пвнкt комвn кв dînsa. Пвтem лесne demonstpa къ орче план перпendiквлар ла estpemitatea внеї разе, este танцent ла sfepъ.

TEOREMA XVI. (Апл. 126).

148. Sвпрafaцa конвексъ a внвї чiлinдрв este екваль кв продвктвл чiрконfepinцеї басвлвї sъў прin înълцimea sa.

Dem. Konsidepînd лiniiле дрепte, каре комвнвn чiрконfepinцa, nemърцinit de mічї, пвтem sокоti sвпрafaцa чiлinдрвлвї ка компвsъ de дрептвnгe авînд ачееашї înълцime кв чiлinдрвл. Sвma ачеstор дрептвnгiврї аў дар de мъsвръ продвктвл sвмеї басврiлор прin комвна înълцime; saў алт-feл sвпрafaцa

чілindрълъї, este продъктъл чірконferінцеї басълъї съъ прін а sa înълціme.

Însemnаре.

Tot ачеst раціonament dовedеште къ sъпрафаца латеракъ а прismeї dрепте este продъктъл перімеtрълъї басълъї съъ прін înълцімеа sa. Dака прisma este облікъ, прецъіш în парте sъпрафаца fie-къръіа паралелограm.

Теорема XVII. (idem).

149. Sъпрафаца ънеї пірамide регълате este екъалъ къ жъмътатеа продъктълъї перімеtрълъї басълъї съъ, прін апотема sa, adікъ прін перпеdікълара коборітъ din вірfъл съъ пе басъл оркъръіа тріънгіъ din sъпрафаца sa.

Dem. Ачеаstъ sъпрафацъ este екъалъ къ о адънаре de тріънгіърї авînd ачелашї бас ші о înълціме комънъ каре este апотема пірамideї; еа este dар екъалъ къ жъмътатеа продъктълъї sъмеї ачестор басърї прін комъна înълціме, saъ а перімеtрълъї прін апотемъ.

Însemnаре.

Dака пірамida ва fi нерегълатъ, требъе съ прецъім în парте fie-каре тріънгіъ че компъне sъпрафаца sa.

Теорема XVIII. (idem).

150. Sъпрафаца конвексъ а конълъї dрепt este екъалъ къ жъмътатеа про-

dsktsлsĭ чipkonferinцeĭ bassлsĭ sъš prin anotema sa.

Dem. Ssпрafaцa konsлsĭ este o adsnape de tpisпrispĭ aвind dpent basspĭ елементеле чipkonferinцeĭ, шi de înълцime комsпъ anotema konsлsĭ. Aшa dap dsпe teopema пречеdentъ, ssпрafaцa ва fi жsмъtatea prodsktsлsĭ perimetpsлsĭ basлsĭ, adikъ a чipkonferinцeĭ prin anotema konsлsĭ.

Королар.

Aшa dap ssпрafaцa konsлsĭ este ачееа a snsĭ tpisпrist dpentsпrist kape ва авеа de bas чipkonferinцa konsлsĭ, шi de înълцime anotema sa.

Teorema XIX. (idem).

151. Ssпрafaцa tpsnkisлsĭ de kon este eksaлъ ks prodsktsл anotemeĭ saлe prin чipkonferinцa medie întpe чipkonferinцеле че'ĭ sлsжesk dpent челе doъ basspĭ. (Fig. 117).

Dem. Sъ ne închipsim ssпрafaцa konsлsĭ totaл desвoлtatъ întp'sn tpisпrist dpentsпrist SBG, aвind de înълцime anotema SB, шi de bas BG eksaл ks чipkonferinцa basлsĭ konsлsĭ (150 кор.). De вом dsче bH perпendiksлapъ лa bS, tpisпrisл SbH ва fi eksiвaлent ks ssпрafaцa konsлsĭ чeлsĭ mik че am skos. În adeвъp, din tpisпrispiлe asemenea, aвem BG : bH :: BS : bS :: BA : ba :: чipк. AB : чipк. ab. Dap BG = чipк. AB; aшa dap bH = чipк. ab. Aшa dap tpisпrisл dpentsпrist SbH kape este жsмъtatea

продꙋктꙋлꙋї лꙋї bH прin bS, este екꙋал кꙋ сꙋпрафаца копꙋлꙋї челꙋї мік. Аша dар diферinца челор doъ трiꙋнгюрї, саꙋ̆ трапезꙋл bHGB, este екꙋал кꙋ сꙋпрафаца трꙋнкюлꙋї. Dар трапезꙋл аре de мъсꙋръ înълцimea sa bB, înmꙋлцitъ прintр'о medie *mn* între челе doъ басꙋрї але сале; шi вом dovedi къ *nm* este екꙋал кꙋ чiрконферinца medie, прекꙋм ам dоведit къ bH ера екꙋал кꙋ чiрконферinца копꙋлꙋї челꙋї мік. Аша dар сꙋпрафаца трꙋнкюлꙋї este продꙋктꙋл апотемеї (каре este înълцimea трапезꙋлꙋї) прintр'о чiрконферinцъ medie între ачелеа але челор doъ басꙋрї.

Теорема XX. (Апл. 127).

152. Сꙋпрафаца sферeї este екꙋалъ кꙋ продꙋктꙋл diametрꙋлꙋї съꙋ̆, прin чiрконферinца ꙋнꙋї черк маре (Fig. 118).

Dem. Сꙋпрафаца sферeї fiind пъсꙋтъ din револꙋцiеа ꙋнеї semiчiрконферinце împрежꙋрꙋл diametрꙋлꙋї AB, fie-каре елемент ал чiрконферinцеї наште din ачееашї мiшкаре сꙋпрафаца ꙋнꙋї кон трꙋнкiат. Fie DG, ꙋнꙋл din ачесте елементе нешърцinit de мiчї,ноï штim съ прецꙋim сꙋпрафаца че ва продꙋче; dар скопꙋл nostрꙋ este съ dъм о алтъ формъ еспресii че ам гъсit. (151).

Fie D*m*, G*n*, разеле басꙋрiлер копꙋлꙋї челꙋї мік трꙋнкiат, DG апотема sa, DK înълцimea sa. Прin мiжлокꙋл I съ dꙋчем IO, разъ а чiрконферinцеї medieї, dꙋпъ ачеаsta CI, разъ перпеndiкꙋларъ пе елементꙋл DG. Челе doъ трiꙋнгюрї CIO, DGK sint asemenea, ка авind латꙋреле перпеndiкꙋларе ꙋна пе алта (80); каре daꙋ̆ DG : DK :: CI : IO; саꙋ̆, неп-

tpꙋ къ чipкonfepinцeлe se aŭ întpe eлe кa pazeлe лop (88), DG : DK :: чipк. CI : чipк. IO; de ꙋnde DG × чipк. IO = DK × чipк. CI. Esnpesiea d'întîiꙋ este sꙋnpafaцa конꙋлꙋї tpꙋнкіat; пꙋtem dap sꙋбstitꙋa aiчї пе a doa, шi sъ zічem къ sꙋnpafaцa пъskꙋtъ de eлementꙋл DG este екꙋалъ кꙋ înълцimea tpꙋнкіꙋлꙋї конꙋлꙋї îmmꙋлцitъ кꙋ чipкonfepinцa пъskъtoape a sfepeї.

Аша dap sꙋma sꙋnpafeцeлop пъskꙋte de eлementeлe чipкonfepinцeї este екꙋалъ кꙋ sꙋma înълцimiлop, îmmꙋлцitъ de ачeastъ чipкonfepinцъ кape este faкtop комꙋn. Însъ, sꙋma înълцimiлop faк diametpꙋл. Аша dap sꙋnpafaцa sfepeї este пpodꙋкtꙋл diametpꙋлꙋї пpin чipкonfepinцa ꙋnꙋї черк mape.

Королар I.

Вom demonstpa, tot întp'ачest paцionament, къ sꙋnpafaцa, saŭ a ꙋneї zone, saŭ a ꙋneї калote sfepiче, este екꙋалъ кꙋ înълцimea sъгmentꙋлꙋї sъŭ, îmmꙋлцit пpin чipкonfepinцa ꙋnꙋї черк mape aл sfepeї ꙋnde se aflъ ачeastъ zonъ.

Королар II.

Este лesne de înцeлes, къ sꙋnpafaцa ꙋnꙋї fꙋs este пpodꙋкtꙋл diametpꙋлꙋї пpin аркꙋл че ꙋнеште mіжлоачеле челор doъ жꙋmътъцї de чipкonfepinцe че'л копpind. Лꙋnцimea ачestꙋї арк se ва кꙋноаште пpin diametpꙋл sfepeї, кꙋnoskînd ꙋнгіꙋл diedpꙋ format de планꙋpiлe челор doъ semiчеркꙋpї.

Королар III.

Fie R раza sfepeĭ; чірконферінца ва fi $2\pi R$; сѕпрафаца ва fi dap $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$. Însъ, πR^2 este еспресіеа кѕпрафецеĭ черкѕлѕĭ а кърѕіа разъ $= R$; аша dap сѕпрафаца sfepeĭ este îmпъtpitъ de kît ачееа а ѕнѕĭ черк mape.

Королар IV.

Fie R, R′, разеле а доъ sfepe; сѕпрафецеле вор fi $4\pi R^2$ шi $4\pi R'^2$. Dap, din пpічіna фактopѕлѕĭ комѕн 4π, авеm $4\pi R^2 : 4\pi R'^2 :: R^2 : R'^2$; аша dap сѕпрафецеле sfepeлор se аѣ întpe еле ка пътpateлe разелор.



Королар V.

Съ сѕпѕнеm sfepa înskpisъ întp'ѕн чілiндpѕ каре съ аїбъ de înълціme шi de diametpѕ пе ачела ал sfepeĭ. Ел ва авеа de сѕпрафацъ продѕктѕл чірконферінцеĭ пpin înълціmea sa каре este екѕал кѕ diametpѕл; аша dap сѕпрафаца sa ва fi екѕалъ кѕ а sfepeĭ.

Ачеastъ пропpietate se înfъцiшeазъ ка ѕн парадокs, kînd ведеm сѕпрафаца чілiндpѕлѕĭ пъstpînd претѕtindinea ачееашĭ лърціmе, în вреmе че лърціmea sfepeĭ mepце stpînrîndѕ-se. Însъ тpeбѕе съ обсервъm къ în вреmе че елеmentеле анѕларе але ачesteĭ din ѕpmъ сѕпрафеце mepr mikшopîndѕ-se în diametpѕл шi пpin ѕpmape în лѕнціme, еле кpesk întp'алтъ dimensie, fiind къ сѕmа лърціmiлор лор este екѕалъ кѕ

semiчіpконferinца, în време че sȣma лърџimiлор елементелор sȣпрafeцеї чiлindpiче este екȣалъ nȣmaї кȣ diametpȣл. Întp'ачеst кіп sȣпрafaца ȣnȣї кон tpȣнкiat este maї întinsъ în лȣнгȣл апотемеї sале de кit în лȣнгȣл înълцimiї tpȣнкiȣлȣї конȣлȣї.

---

§ III. МЪSȢРА ВОЛȢМІNІЛОР.

Прiнчiпȣрї џенерале asȣпра mъsȣpeї волȣminiлор.

(Аплiкареа 135 — 145).

153. Dȣпе челе че am zis пentpȣ mъsȣpa sȣпрafeцелор, nȣцin лȣкрȣ ne maї pъmîne a adъога акȣm. Ȣnimea de mъsȣpъ este ȣn волȣmin арбitpap, dap кȣnoskȣt; ка sъ ne fiксъm ideiле, noї вom лȣa de ȣnime кȣбȣл aвînd dpeпt латȣpъ ȣnimea лiniapъ, adiкъ metpȣл. Аша a mъsȣpa ȣn soлid ва sъ ziкъ: A afла nȣmъpȣл întpeг saȣ fpaкцionap de metpe кȣбiче копрinse întp'ȣn soлid dat.

Теорема XXI. (Апл. 135—138).

154. Волȣminȣл ȣnȣї паралелiпiped dpeпt este екȣал кȣ продȣкtȣл басȣлȣї sъȣ прin înълцimea sa (Fig 119).

Dem. Sъ ne înкiпȣim басȣл soлidȣлȣї îmпъpцit în metpe пъtpate; de вom tъia soлidȣл прintp'ȣn плап паралел ла ачеst бas, în înълцime de ȣn me-

tpȣ, este înbedepat kъ ачeastъ ȣkatъ ва конpinde atitea metpe кȣбe kîte metpe пътpate konpinde ба-sȣл, konpinzînd шi пpeцȣpiлe фpakціonape.

Аша dap, daka soлidȣл ape 2, 3, 4, metpe de înълціme, ел ва konpinde de 2, 3, 4 opĭ atîtea me-tpe кȣбe; аша dap нȣмъpȣл metpeлop кȣбe konpinse în волȣmin este пpodȣktȣл нȣмъpȣлȣĭ metpeлop пъ-tpate din бas, пpin нȣмъpȣл metpeлop din înълціme.

Dака înълціmea ва konpinde ȣn нȣмъp фpakціo-нap пpeкȣm $8\frac{3}{5}$, вom авea 8 despъpціpĭ opizontaлe, шi чeлe $\frac{3}{5}$ dintp'o despъpціpe; аша dap пpeцȣл ȣneĭ despъpціpĭ ap tpeбȣi sъ se înmȣлцeaskъ пpin $8\frac{3}{5}$. Dap нȣмъpȣл metpeлop кȣбe konpins întp'o despъp-ціpe este екȣaл кȣ нȣмъpȣл întpeг saȣ фpakціonap aл metpeлop пътpate din бas; аша dap волȣminȣл паpaлeлiпiпedȣлȣĭ dpeптȣнгiȣ este пpodȣktȣл basȣлȣĭ пpin a sa înълціme; saȣ, кape este tot ȣna, пpo-dȣktȣл чeлop tpeĭ dimensiĭ aлe saлe.

Însemnape.

Пȣtem da ачesteĭ teopeme o aлtъ demonstpaціe întpȣ toate întokmaĭ кȣ чea espȣsъ (n^o 104), konpin-zînd kasȣл нekomensȣpaбiлeлop.

Kopoлap I.

Волȣminȣл ȣнȣĭ кȣб este пpodȣktȣл a tpeĭ faktopĭ екȣaлĭ кȣ лatȣpa ачestȣĭ soлid; ел este dap кȣбȣл apitmetik aл валoapeĭ нȣмepiчe aл ачesteĭ лatȣpe.

Este лesne de înцeлes къ ȣn кȣб de o лatȣpъ îndoitъ, întpeitъ, înпътpitъ, нȣ ва fi ȣn волȣmin

îndoit, întpeit saŭ împътpit, чi ва fi de 8 opĭ, de 27, de 64 de opĭ atît de mape; пentpȣ къ ачeste пȣmepe sînt кȣбȣpiле пȣmepiче але валоарелор 2, 3, 4, каре sînt ачелеа але кȣбȣpiлор кътtate, латȣра кȣбȣлȣĭ dat fiind лȣатъ de ȣnime.

Ка sъ авem ȣn кȣб îndoit, întpeit de кît алtȣл, требȣе sъĭ dъm de латȣpъ pъdъчina кȣбiкъ а пȣmepелор, 2, 3, шчл., лȣînd de ȣnime латȣра кȣбȣлȣĭ (Fig. 124). Аша, латȣра ȣnȣĭ кȣб каре sъ аĭбъ dоъ metpe кȣбiче de волȣmin, ва fi $\sqrt[3]{2} = 1^m, 260$.

Џеоmetpiea елеmentapъ пȣ пе dъ miжлоаче ка sъ afлъm латȣра ȣnȣĭ кȣб îndoit de кît ȣn кȣб dat; пentpȣ ачeasta а ажȣns челебpъ ла чеĭ векĭ пpоблеma dȣплiкацii кȣбȣлȣĭ, каре se пpопȣse odinioapъ de оракȣлȣл de ла Delf. Dap se поate desлега пpin ажȣtорȣл ȣпор кȣрбе каре sînt afapъ din domenȣл џеоmetpii елеmentape; шi кътpe ачеstea, апpоксimaцiea пȣmepiкъ este maĭ пpefepaбiлъ în пpактiкъ.

Королар II.

De вom deskomпȣпе în dечimetpe латȣpеле ȣnȣĭ metpȣ кȣб, se înцелеџе къ кoпpinde $10 \times 10 \times 10$ saŭ 1000 de dечimetpe кȣбе. Шi iаpъш dечimetpȣл кȣб кoпpinde 1000 чentimetpe; чentimetpȣл 1000 miлimetpe кȣбе. Аша, калкȣлȣл fpакцiiлор metpeлор кȣбiче se pedȣче а лȣа челе 3 d'întîiŭ zечimaле пentpȣ dечimetpe, пе челе 3 ȣpmътoape пentpȣ чentimetpe, шi înкъ 3 пentpȣ miлimetpеле кȣбе. Spe ексemплȣ:

Ȣn паpалелiпiпed аpе пentpȣ челе tpeĭ dimen-

siĭ 10^m,251; 11^m,315; 6^m,112; воломinȣл съŭ ва fi $10,251 \times 11,315 \times 6,112 = 708,931277280$ saŭ 708 metpe, 931 deчimetpe, 277 чentimetpe, 280 miлimetpe кȣбе.

Teorema XXII.

155. **Волȣminȣл ȣneĭ prisme dpente oape-кape este екȣал кȣ prodȣktȣл басȣлȣĭ съŭ prin a sa înълцime.**

Demonstpaцiea este ачееашĭ кȣ a teopemeĭ пpeчedente.

Teorema XXIII. (Апл. 139).

156. **Волȣminȣл чiлindpȣлȣĭ este пpodȣktȣл басȣлȣĭ съŭ prin a sa înълцime.**

Ачееашĭ demonstpaцie. Кътpe aчestea чiлindpȣл este o prismъ кȣ басȣл чipкȣлap.

Teorema XXIV.

157. **Волȣminȣл ȣnȣĭ паралелipiped oape-кape este екȣал кȣ prodȣktȣл басȣлȣĭ съŭ prin înълцimea sa.**

Dem. Este destȣл съ demonstpъm къ ȣn паралелipiped облiк este екȣал кȣ ȣn паралелipiped dpent de ачелашĭ бas шi ачееашĭ înълцiме.

Fie ȣn паралелipiped облiк пе басȣл кърȣia noĭ съ faчem ȣn паралелipiped dpent de ачееашĭ înълцiме; saŭ басȣл съŭ de d'asȣпpa ва fi конpins între ачелеашĭ паралеле кȣ басȣл de d'asȣпpa a паралелipipedȣлȣĭ облiк (Fig. 122), saŭ în kontpa se ва întîmпла (Fig. 123).

În касꙋл întîiꙋ̆ (Fig. 122), паралеліпіпеdꙋл dpent este екꙋал кꙋ fiгꙋра totалъ maĭ пꙋцin о prismъ tpiꙋнгіꙋларъ, авînd dpent вas tpiꙋнгіꙋл dpentꙋнгіꙋ̆ НрВ, ші паралеліпіпеdꙋл облік este ші ел екꙋал кꙋ fiгꙋра totалъ maĭ пꙋцin о prismъ, авînd de вas tpiꙋнгіꙋл dpentꙋнгіꙋ̆ GIA. Челе doъ tpiꙋнгe sînt înвedepat екꙋале, ші prismeле каре аꙋ̆ ачееашĭ înълцime ші вasꙋpĭ екꙋале, sînt екꙋівалente; аша dap soлidꙋл облік este екꙋівалent кꙋ soлidꙋл dpent.

În касꙋл ал doiлеа (Fig. 123), de вom прелꙋнцi вasꙋpiле de d'asꙋпра але челор doъ soлide, паралелеле вор determina ꙋн паралелограm *mnpq* екꙋал кꙋ васꙋл комꙋн ал челор doъ soлide, ші каре ва fi вasꙋл de d'asꙋпра ал ꙋнꙋĭ ал 3-леа паралеліпіпеd каре ва fi, în компарацie кꙋ fie-каре din челе doъ soлide, în касꙋл fiгꙋреĭ 122. Ел ва fi dap екꙋівалent кꙋ fie-каре din еле; аша dap вор fi екꙋівалente între еле.

Королар.

О prismъ облікъ оаре-каре este екꙋівалentъ кꙋ о prismъ dpeantъ de ачееашĭ înълцime ші ачелашĭ вas. În adевър, ачеаsta se întîmплъ ла prisma tpiꙋнгіꙋларъ, fiind къ еа este жꙋмътatea ꙋнꙋĭ паралеліпіпеd de ачееашĭ înълцime ші кꙋ ꙋн вas îndoit. Dap о prismъ оаре-каре пꙋtînd tot d'а ꙋna а se deskomпꙋне în atîtea prisme tpiꙋнгіꙋларе кîte tpiꙋнгіꙋpĭ пꙋtem фаче din вasꙋл съꙋ̆, teopeша каре este adевъратъ pentpꙋ fie-каре din ачеste prisme, ва fi ші pentpꙋ totaлꙋл лор, adiкъ pentpꙋ prisma întpeагъ.

Teorema XXV.

158. **Doъ nipamide de aчeeaшĭ înълцime, шi de basѕpĭ ekѕale în sѕnpafaцъ, sînt ekѕivalente** (Fig. 125).

Dem. Fie чeлe doъ nipamide SABC, TGDH, de aчeeaшĭ înълцime, шi aвînd de bas tpiѕnгюpĭ ekѕivalente; zik kъ eлe вop fi ekѕaлe în воlѕmin. • Kъчĭ fie SABC чea шaĭ mape. Difepinцa, op-kape вa fi, se noate penpesenta npintp'o npismъ, aвînd de bas ABC, шi de înълцime o linie oape-kape Ax. Dap este neste nѕtinцъ de a npiimi o ast-fел de difepinцъ între чeлe doъ nipamide.

Ka sъ dobedim aчeasta, sъ desnъpцim înълцimea komѕnъ a чeлop doъ nipamide în kîte-вa пъpцĭ ekѕaлe, maĭ miчĭ de kît Ax; шi ka sъ ne fiksem ideiлe, sъ sѕnѕnem kъ aвem 5 îmпъpцipĭ. Dѕkînd npin nѕnktѕpiлe de îmпъpцipe nлanѕpĭ tъind în kѕpmeziш nipamideлe, вom faчe tot atîtea nipamide tpѕnkiate, a kъpopa sѕmъ вa aвea în вîpf o nipamidъ întpeaгъ. Aчeste tpѕnkюpĭ de nipamide вop aвea basѕpĭ ekѕiвaлente ѕnѕл aлtѕia, nentpѕ kъ tpiѕnгюл MVF, spe eksemnлѕ, este ekѕiвaлent kѕ tpiѕnгюл mvf. În adeвъp, aчeste tpiѕnгюpĭ, kape sînt pesnektiв asemenea kѕ basѕpiлe nipamideлop, din npiчina napaлeлismѕлѕĭ лatѕpeлop, de ѕnde ѕpmeazъ notpiвipea ѕnгюpiлop, se aŭ kъtpe aчeste basѕpĭ; ѕnѕл $: : \overline{MF}^2 : \overline{AC}^2$; чeл-л-aлt $: : \overline{mf}^2 : \overline{GD}^2$. Dap în лokѕл panoptѕлѕĭ d'întîiŭ nѕtem nѕne ne aл лѕĭ $\overline{SM}^2$ kъtpe $\overline{SA}^2$; în лokѕл чeлѕĭ d'aл doiлea ka aл лѕĭ $\overline{Tm}^2$ kъtpe $\overline{TC}^2$. Dap aчeste doъ panoptѕpĭ sînt ekѕaлe; nenpѕ kъ daka, npin вîpfѕpiлe S, T, вom sokoti ѕn nлan napaлeл лa

планъл тъеtop MFV, *mfv*, челе doъ dpente SA, TG, sînt în касъл de ла n^o 142, ші sînt îmпърціte în пърці пропорціонале, de ъnde SA : SM :: TG : T*m*; ші $\overline{SM}^2 : \overline{SA}^2 :: \overline{Tm}^2 : \overline{TG}^2$. Аша dap, fiind къ челе doъ sекціï MFV, *mfv*, se аў întpe еле ка басъріле челор doъ піramide, ші пentpъ къ ачеste басъpï sînt еквівалеnte, ші челе doъ sекціï sînt еквівалеnte.

Dъпе ачеasta, съ фачем 5 пpisme tpiънгюларе, пе челе 5 басъpï formate în піramida SABC: ачеste пpisme вор еші afapъ din піramidъ, ші sъma лор ва fi ън волъmin maï mape de кît ачела ал піrami-deï. Съ фачем în піramida TGHD, пе ачелеаші басъpï, dap înъъntpъ, tot ast-fел de пpisme, este лесне de a рекъноаште asъпра fiгъpeï къ аічï ва еші о пpismъ maï пъціn de кît în чееалалtъ піramidъ; къ челе паtpъ пpisme ast-fел фъкъte вор fi еквале челор паtpъ пpisme sъперіоаре але fiгъpeï SABC, ші къ вом авеа întp'ачеstea о пpismъ maï mълt авînd de бас ABC ші de înълціmе înълціmea комънъ. Ачеastъ пpismъ este dap diferinца între челе doъ sъme de пpisme ешinde ші intpînde; dap еа este maï mікъ de кît diferinца sъпъsъ а піramideлор, пentpъ къ къ ачелашï бас еа аpe о înълціme maï mікъ de кît A*x*. Diferinца челор doъ піramide ва fi dap maï mape de кît ачееа а челор doъ sъme de пpisme, чееа че este абsъpd, пentpъ къ ънеле пpецъеsк maï mълt de кît ъna din челе doъ піramide, în време че челе-л-алte пpецъеsк maï пъціn de кît чеа d'ал doiлеа. Dap, ачеastъ коntpaziчере ва еksista în кîtъ време вом sъпъне о diferinцъ între челе doъ піramide. Аша dap doъ піramide de ачееашï înълціme ші къ басъpï еквівалеnte sînt еквале în волъmin.

Теоrема XXVI. (Апл. 140).

159. **Волѕтinѕл ѕneĭ пiрамide tрiѕпгiѕларе este a tрeia парte a продѕкtѕлѕĭ басѕлѕĭ sъѕ̆ прin înълцimea sa (Fig. 120).**

Dem. Ка sъ demonstръm aчeasta este destѕл sъ dовedim къ о пiрамidъ tрiѕпгiѕларъ este a tрeia парte a ѕneĭ прisme de ачелашĭ бas шi de ачееашĭ înълцime; каре se faчe în кiпѕл ѕрmътор.

Fie пiрамida SABC. Dѕкînd BD шi AG d'o потрiвъ шi параделе кѕ dѕпга SC, вom faчe пе басѕл ABC o прismъ de ачелашĭ бas шi de ачееашĭ înълцime кѕ пiрамida; dap ziчem къ ea este a tрeia парte din aчeastъ прismъ. În adевър, daка o вom sкoate din aчest soлid прin плапѕл SAB, прisma se ва pedѕче ла о пiрамidъ патрѕпгiѕларъ авînd de вîрf пѕпкtѕл S, шi de бas параделограmѕл ABDG. De вom тъia aчeastъ пiрамidъ прin плапѕл SAD, o despърцim în doъ пiрамide tрiѕпгiѕларе авînd ачелашĭ вîрf S, шi басѕрĭ екѕале, шi прin ѕрmаре екѕiваленte. Însъ ачеea каре аре de бas AGD, se поate sокоti ка авînd вîрfѕл sъѕ̆ în A, шi de бas faцa sa GSD, шi în касѕл aчesta ea аре înведepat de бas шi de înълцime басѕл шi înълцimea прismeĭ прекѕm шi пiрамida datъ: аша dap ea este екѕiваленtъ кѕ aчeasta. Dap ea este екѕiваленtъ шi кѕ пiрамida SADB; аша dap прisma este комппѕсъ de tрeĭ пiрамide екѕiваленte, шi din каре ѕna este пiрамida datъ; аша dap aчeasta este a tрeia парte a прismeĭ de ачелашĭ бas шi de ачееашĭ înълцime.

Аша dap ea ape de волȣmin a treia napte din продȣктȣл басȣлȣĭ съȣ̆ прin înълцimea sa.

Королар.

О пiрamidъ кȣ ор-че fел de бас se поate despърцi întр'atîtea пiрашide triȣпгюларе кîte triȣпгюрĭ пȣtem face din басȣл съȣ̆. Aчeste пiрашide аȣ̆ toate ачееашĭ înълцime, шi sȣma басȣрiлор лор face пе ал пiрашidеĭ totale. Аша dap волȣminȣл ȣпеĭ пiрашidе оаре-каре este a treia napte a продȣктȣлȣĭ басȣлȣĭ съȣ̆ прin înълцimea sa.

Însemnape.

Ȣп полiеdрȣ оаре-каре se поate deskompȣпе în пiрamide, лȣînd înъȣпtpȣ ȣп пȣпкt dȣпе вое, шi dȣкînd drepte de ла aчest пȣпкt ла deosebiteле вîрfȣрĭ. Se înцелеце къ aчest mijлок d'a evaлȣa волȣminȣл съȣ̆ пȣ este nічĭ dекȣш аплiкабiл în практiкъ. Noĭ вom da (Апл. 145) deosebiteле mijлоаче че поate чiпева întребȣinца ка sъ mъsoаре волȣminȣл полiеdрелор шi a трȣпȣрiлор перегȣлate.

Теорема XXVII.

160. Волȣшinȣл ȣпȣĭ коп este a treia napte a продȣктȣлȣĭ басȣлȣĭ съȣ̆ прin a sa înълцime.

Dem. Пentpȣ къ копȣл este o пiрашidъ кȣ басȣл чiркȣлар (147).

Teorema XXVIII. (Апл. 141).

161. Волзшінзл знзї трзнкіў de піраmidъ тріънгізларъ este екзал къ волзmінзл а треї піраmide каре ар авеа de înълціme комзнъ îнълціmea трзнкізлзї, ші de басзрї, зна, басзл de жос; алта басзл de сзс, ші а треіа, о medie пропорціоналъ între челе доъ басзрї (Fig. 121).

Dem. Съ dзчеm întîiў зн план каре съ скоацъ din трзнкіў піраmida *d*ABC, каре аре de бас басзл de жос, ші de înълціme пе ачееа а трзнкізлзї. Ne ръmîne о піраmidъ кз басзл патрзнгізлар *g*AB*h*, ші авînd вîрфзл съў în *d*. Съ dзчеm планзл че таe прin *dg*B. Ел determinъ о а доа піраmidъ каре аре вîрфзл съў în B, ші de бас тріънгізл *gdh*. Афларъm dар пînъ ачі челе доъ d'întîiў din челе треї пърцї поmenite maї сзс; съ черчеtъm пе а треіа.

Ачеаsta este о піраmidъ авînd вîрфзл съў în *d*, ші de бас тріънгізл *g*AB. Noї îї сзбstitзъm d'о кат datъ о алтъ піраmidъ еквівалентъ каре ва авеа ачелашї бас, ші вîрфзл în пзнктзл K, че se афлъ пе *d*K, паралелъ ла планзл басзлзї. Съ знim *g*K. Noї пзtem konsidepa ачеаstъ поъ піраmidъ ка авînd вîрфзл съў în *g*, ші de бас фаца AKB; еа аре атзнчї de înълціme înълціmea трзнкізлзї; ръmîne съ dobedim къ тріънгізл AKB este mediў пропорціонал între челе доъ басзрї.

Sпре ачеаsta, съ dзчеm KI паралелъ ла BC, ші прin зрmаре ла *dh*; тріънгізл AKI ва fi înbedepat екзал кз басзл чел mік *dgh*. Челе доъ тріън-

гюрї ABC, ABK, авînd вîрfѕл лор комѕн în B, se аў între еле прекѕm базѕріле лор, чееа че dъ:

ABC : ABK : : AC : AK : : AB : AI.

Dар челе dоъ tріѕнгюрї AKB, AKI, каре аў вîрfѕл лор комѕн în K, dаў asemenea:

ABK : AKI : : AB : AI.

Аша dар, din прічіna рапортѕлѕї комѕн AB : AI, авет ABC : ABK : : ABK : AKI. Аша dар tріѕнгюл ABK este mediў пропорціонал întре челе dоъ базѕрї але ţрѕнкюлѕї. Аша dар, шчл.

Королар.

Dака пірамida este кѕ ор-че fел de бас, о пѕтem desпърці în пірамide tріѕнгюларе, ші tеорema, adевъратъ пentрѕ fie-каре din еле, ва fi adевъратъ шіn пentрѕ tot.

162. Ѕн ţрѕнкю de кон пѕtîndѕ-se asemъна кѕ ѕн ţрѕнкю de пірамidъ, пропосіціеа este adевъратъ ші пentрѕ ţрѕнкюл конѕлѕї.

Теоrema XXIX. (Апл. 142).

163. Волѕтinѕл sfepiї este a tреia парte a продѕкtѕлѕї сѕпрафеціеї sале прin разъ.

Dem. Konsideрînd сѕпрафаца ка компѕсъ de планѕрї nemъцinit miчї, вedem къ sfepa este o ѕniре de пірашide авînd de бас ачеste планѕрї miчї, ші de înълціme раза sfepeї, комѕнѕл лор вîрf fiind ла чentрѕл. Аша dар волѕтinѕл totaл este a tреia парte a продѕкtѕлѕї totaлѕлѕї базѕрілор прin înълціmea комѕнъ, saў a сѕпрафеціеї прin разъ.

Însemnape.

Se поate întpeба кape este figѕpa feцeлoop пemъpцinit mічї кape компѕп sѕпpafaцa sfepeї. De вom dѕчe npin чentpѕл sъѕ̆ tpeї плaпѕpї пepпendiкѕлape întpe eлe, eлe вop desпъpцi sѕпpafaцa în ont tpiѕпгiюpї sfepiчe eкѕiлatepaлe шi eкѕaлe întpe eлe. Dap пѕtem sѕбt-îmпъpцi aчestea în aлte tpiѕпгiюpї în maї mѕлte кinѕpї; sпpe eкsemплѕ, ѕnind ѕn віpf кѕ mijлoкѕл басѕлѕї onѕs npintp'ѕn apк de чepк mape. Кѕ кinѕл aчesta tpiѕпгiюpiлe mepг miкшopîndѕ-se шi aпponiindѕ-se de stapea плaпѕpiлop; îmпъpцipea sokotindѕ-se npeлѕпцitъ nemъpцinit, лatѕpeлe кѕpбe ajѕпг dpente, шi sѕпpafaцa este deskomпѕsъ întp'o шѕлцime de tpiѕпгiюpї eкѕaлe saѕ̆ neeкѕaлe, op кѕm ва fi, шi кape sлѕjesk de бas лa o шѕлцime de пipamide кape aѕ̆ de înълцime komѕпъ paza sfepeї.

Коpoлap I.

Fie R paza sfepeї, вom aвea $4\pi R^2$ de sѕпpafaцъ; шi de волѕmin, $\frac{1}{3}.\ 4\pi R^2 \times R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

De вom sѕбstitѕa în лoкѕл лѕї R npeцѕл лѕї $\frac{D}{2}$, D penpesentînd ne diametpѕл, волѕminѕл ва fi $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\ (\frac{D}{2})^3 = \frac{4}{24}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$. Aчeasta este esnpesiea чea maї oбiчпѕitъ a волѕminѕлѕї sfepeї.

Коpoлap II.

Чiлindpѕл чipкonskpis лa sfepъ ва aвea de mъsѕpъ $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$; dap esnpesiea $\frac{4}{3}\pi R^3$ este $\frac{2}{3}$ din $2\pi R^3$. Aшa dap волѕminѕл sfepeї este doъ a tpeia dintp'aл чiлindpѕлѕї чipкonskpis.

Королар III. (Апл. 143).

Fie R, R′ разеле а доъ sfepe; волзmineле se вор авеа întpe еле : : $\frac{4}{3}$ пR^3 : $\frac{4}{3}$ пR$'^3$: : R^3 : R$'^3$. Аша волзmineле sfepeлор se аў întpe еле ка кзбеле разелор.

Королар IV.

Зn sектор sfepiк аре de mъsзpъ а tpeia парте din продзкtзл sзпрафеџеї басзлзї пріn разъ.

Королар V.

Ка sъ афлъm волзminзл зпзї serment sfepiк каре ар авеа de бас о калоtъ sfepiкъ, вом калкзла волзminзл sектopзлзї întpeг, ші вом skъdea пе ачела ал копзлзї.

Ка sъ афлъm волзminзл зпзї serment кз доъ басзpї, вом калкзла волзminзл sermentзлзї пpiвit în комплект, ші din dînsзл вом skoate волзminзл sermentзлзї че s'а adъогаt ка sъ se комплектеze.

Însemnape.

Калкзлзл волзminзлзї sermentелор пресзпзне кзноштinџа разеї sfepeї. Daка sermentеле ар fi desпърџitе, eatъ кзm s'ар афла ачеаstъ разъ (Fig. 126).

1° În касзл зпзї serment кз калоtъ GHB, а къpзia гросimе кзnosкзtъ este CB, pestзл diametpзлзї este (82) о а tpeia пропорџionaлъ întpe BC, ші CG. Aчeste доъ din зpшъ кitimї sînt кзnosкзte. Вом

афла dар прін ажвторвл лор партеа CA a diametрвлві, ші, лвінd жвмътатеа лві CB+CA, вош афла раza къвtatъ.

2° Ін касвл внві serment кв dоъ басврі, не тре-бве чева калквл маі мвлt. Съ репресентъм прін h гросімеа KD a ачестві serment; fie DB$=x$, KA $=y$, R ші r, разеле челор dоъ басврі; вом авеа ѫnвеdерат челе dоъ релацiї $x:r::r:h+y$; ші $h+x:R::R:y$; каре dъ екваціїле, $hx+xy=r^2$ (1). Ші $hy+xy=\overline{R}^2$ (2); ачеастъ sistemъ dеsлегатъ прін міжлоачеле орdінаре не ва фаче кв-носквте пе x ші y, a кърора свмъ, adъогатъ ла h, ва da diametрвл întpeг.

Касвл ал doilea de aiчї чере întpebвінцареа калквлелор, каре поате sînt неквноsквte чititорвлві. Din норочіре ел este преа рар. Чел d'întîів este пвцін рар; поі вом da вн екsемплв de калквлвл внві serment кв вн бас.

Fie $0^m,1$ înълцімеа sa; $0^m,4$ раза sa. Вом авеа d'о кам datъ $0^m,1:0,4::0,4:x$, de вnde $x=1^m,60$, каре кв $0^m,1$, dъ $1^m,70$ пентрв diametрв, ші прін врмаре $0^m,85$ пентрв раза sfереі.

Волвмінвл sекторвлві este a треia парте a разеі îммвлцітъ прін бас. Însъ ачеста. (152, Кор. I) este екsал кв înълцімеа sa $0^m,1$ îммвлцітъ кв чіркон-феpінца каре аре de разъ 0,85; аша dар еа este $0^m,1\times 2\pi\times 0,85=3,1416\times 0,170=0,534072$. Îммвлцінd прін 0,85, ші лвînd a треia парте, авем 0,1513204 пентрв волвмінвл sекторвлві. Волвмінвл конвлві че требве съ skoatem este $\frac{1}{3}$ (0,85—0,1). п. $(0,4)^2=0,125664$. Съ skoatem din пречеdентвл, ръміне 0,0256564 пентрв прецвл serментвлві,

adікъ 25 dечimetpe, 656 чentimetpe, 400 шiлimetpe кsбe.

Teorema XXX.

164. **Пiрamideлe asemenea se aŭ întpe еле ка кsбsрiле лatsрелор omoлoaцe. Se aŭ asemenea шi toate soлideлe asemenea каре se пot deskomпsne în пiрamide.**

Dem. Fie B, *b*, basspiле а doъ пipamide; шi G, *g*, doъ лatspe omoлoaцe але ачestop bassрĭ, bassрiле fiind asemenea, se aŭ întpe еле ка пътpateлe челор doъ лatspe omoлoaцe G, *g*, de snde

$$B : b :: G^2 : g^2.$$

Dap înълцimiле H, *h* fiind пропорцiонале кs челел-алте dimensiĭ, вом авеа asemenea . . . .
$\frac{1}{3}$ H : $\frac{1}{3}$ *h* :: G : *g*. Îmmsлцind dsпе pîndsiaлъ aflъm . . . . $\frac{1}{3}$ H × B : $\frac{1}{3}$ *hb* :: G³ : *g*³. Чeĭ doĭ d'întîĭ tepminĭ sînt espesiiле волsmineлор челор doъ пipamide; шi G, *g* sînt лatspe oape-каре. Аша dap волsmineле пipamideлор asemenea se aŭ ка кsбsрiле dimensiiлор omoлoaцe.

Королар.

Tot аша este шi пentps поліedpeле asemenea каре sînt компsse de пipamide asemenea.
(Аплікареа 144, 145).



АПЛІКАЦІЕА

ЏЕОМЕТРІЕЇ.

Теоriеа n° 1.

1. Оріџіna Џеометріеї se перde în întѕнерекѕл tімпѕрілор. Маї de обште se ѕпѕне къ еа треѕе съ se fi нъскѕt în Еџіпt, ші къ fѕ креатъ de требѕінџа de а stîрпі ameстекареа хotарелор мошіілор, пе каре în тоџї аniї Nілѕл ле акоперrea пріn върsареа sа. De требѕе съ кredem пе Еродоt, saѕ maї біне пе преоџії еџіпtenї ал кърора ел este о еко, Sesostris ар fi pîndѕit спре ачест sfîршіt ѕп корп de învъцаџї каре ар fi învентат Џеометріеа ші арпентаџіѕл. Ачеастъ претенџіе нѕ поате sѕferi о черчетаре sepioasъ: Џеометріеа este контімпѕранъ кѕ чеї d'întîїѕ оamenї, saѕ чел пѕџіn maї веке de кît чівілisаџіеа, каре нѕ s'ар fi пѕtѕt desволtа fъръ dînsа.

Ор ші кѕм ар fi, требѕінџа de а мъсѕра џаріnеле а însѕflat челе d'întîїѕ ideї asѕпра пропріетъџілор întindеріі; dар, кѕ крештереа soџіетъџії, ноѕе требѕінџе desволtîndѕ-se кѕ dînsа, adѕсеръ ноѕе рefлексії, ші îмбогъџіръ штіінџа кѕ ноѕе прінчіпе. Îndатъ трактаџіеа ачестор nesтръмѕtate adевърѕрї копрinse челе maї мѕлте требѕінџе матеріале але чівілisаџіеї; кѕ dînsа se sfътѕі ка съ кроїаскъ dрѕмѕрї, съ sапе каналѕрї, съ клъdeаскъ tot fелѕл de monѕmente, съ

тъsoape ші sъ deskpie deesebiteлe џinѕtѕpi de пpe faџa пъmintѕлѕi, sъ se îndpenteze пе шаpe depapte de џъpтѕpi, ші sъ esпліче mіш:карea steлелоp. În sfîpшit s'aѕ pekѕnoskѕt къ apteлe ші шtiinџeлe џin tot de o datъ ші de Џeometpie, ші пpiimesk de ла dînsa ѕпe-opi niшte pегѕле neaпъpate, ші tot d'aѕna niшte metoade folositoape.

Astъzi, апліkatъ ла ачелеаші обiekte, impoptanџa sa a tpeбѕit sъ kpeaskъ, din пpічіna desvoлtъpiлоp че aѕ adѕs timпѕл, depъptînd xotapeлe indѕstpii. Џeometpiea este базѕл лѕкpъpiлоp пѕбліче; ea фаче пе astponom ші повъџѕеште пе navigatop; пpeчептелоp saле sînt datoape toate apteле de konstpѕkџie, edifiџiѕpiле пѕбліче, kaseле noastpe, foptifikaџiiле opaшелоp noastpe, dpѕшѕpiле, poptѕpiле, kanaлѕpiле, ші apxitektѕpa шtiinџifikъ a neпѕmъpaтелоp kopaбii kape se плimбъ пе mъpi. Џeometpѕл mъsѕpъ ші deseamnъ dѕпе пpoпopџiiле лоp divepse пъpџi але statѕpiлоp, ші kape, aпpoпiind ast-feл difepiteле лоp пѕnktѕpi, фаче ka okiѕл sъ пpeџѕiaskъ konsekѕinџeле posiџiiлоp peлative; eл kipѕеште întpeбѕinџapea maшinелоp noastpe de ръзбоiѕ; mъsѕpiлоp ші kaлkѕліiлоp лѕi sînt sѕпѕse miшkъpiле apmiiлоp. În sfîpшit, toate шtiinџeле sînt ѕnite kѕ Џeometpiea; ea este fѕndamentѕл mekaniчеi, idpaѕлічеi, optiчеi, ші toate пъpџiле fisiчеi пpiimesk de ла dînsa nekontenite ажѕtoape.

Întp'o sfepъ mai mъpџinitъ, Џeometpiea ne învaџъ a mъsѕpa ші a pепpesenta moшiiле noastpe, џapineле noastpe, kлъdipiле noastpe; a ле пpeџѕi ші a ле kompъpa keлtѕеліле ші пpodѕktѕpiле. Ea mъsoapъ înълџimi ші distanџe de kape nѕ ne пѕtem

апропiiа, повъцѹеште mîна desemnatорѹлѹĭ; în sfîршit, еа dъ о mѹлцime de mijлоаче кѹ каре не слѹжim adesea în екопоmiеа domesnікъ, шi de каре не ва da о idee ачеаstъ карtе.

Теоriеа *n*° 2.

2. În naтѹръ se афлъ mѹлtе ексemпле de ценерацiеа atestор треĭ фелѹрĭ de întidepĭ. Înвîрtindѹ-se пъmîntѹл împрежѹрѹл soареlѹĭ, чentрѹл съѹ deskрie о лiнie кѹрбъ кат чiркѹларъ; аксѹл съѹ, каре ръmîne tot d'аѹna паралел кѹ sine'шĭ, deskрie, pezemîndѹ-se neînчetat пе ачеаstъ лiнie кѹрбъ, о сѹпрафацъ чiлindрiкъ; în sfîршit, револѹцiеа diѹрнъ а пъmîntѹлѹĭ împрежѹрѹл osii sале, deskрie кѹ fie-каре din meрidiанеле sале ѹn solid sfeрiк.

Теоriеа *n*° 4.

3. Este înвedeрat къ întinzînd ѹn вîрф între доъ пѹнктѹрĭ, вom авеа чеа maĭ mікъ лѹнцime пѹtinчioаsъ între ачесtе доъ пѹнктѹрĭ. Ѹn fiр întins аре dар fiгѹра ѹнеĭ лiнiĭ dрепtе.

Ачеаsta не ажѹtъ съ верiфiкъm рексtitѹdinea рiглелор кѹ каре не слѹжim ка съ dѹчem лiнiĭ dрепtе пе хîрtie, шi але кърора коаmе sînt sокоtite de лiнiĭ dрепtе. Este destѹл съ întindem ѹн fiр de mъtase între кълъtîiле търцiнiлор; dака fiрѹл se ва лiпi de рiглъ, пеste tot, ачеаsta ва fi ексактъ шi ва репрesenta о лiнie dреаntъ. De ва fi кѹрбъ шi конкавъ, se ва zърi лѹmînъ între fiр шi рiглъ; de ва fi кѹрбъ шi конвексъ, fiрѹл se поаte лiпi de dînsa;

însъ, fiind пuцin maĭ depъrtat de marцine, ел va face simцitъ кurбъturъ.

Este un алt шiжлок шi maĭ simплu ка sъ verifiкъm daка o riглъ este dreaптъ. Лiniea dreaптъ fiind drumuл чел maĭ skurt de ла un пunкt ла алtuл, numaĭ unuл poate eksista între doъ пunкturĭ. Daка dar vom пune riгла че voim sъ verifiкъш пe doъ пunкturĭ *a*, *b* kît maĭ depъrtate se va пutea, шi vom traцe o лinie în лunguл riглеĭ, шtergînd ку mare eksaktitate marцinea ку vîrfuл unuĭ vrîчеar, ачеastъ лinie, de va fi dreaптъ, treбue sъ se kotropeaskъ ку ачееa че o vom duче tot ку кiпuл ачesta între ачелеашĭ doъ пunкturĭ, dupъ че vom întoarче riгла. Este лesne de înцелеs къ daка marцinea ачesteĭ riгле ar fi fost, spre eksemплu, konveksъ, лiniea trasъ d'întîĭu va treче peste adevъrata лinie dreaптъ каre uneшte челе doъ пunкturĭ *a*, *b*, чееa че d'o кam datъ nu se poate priчепe; dar de o vom апliка ла ачeste doъ пunкturĭ duпe че o vom întoarче, ea va лъsa лок între adevъrata лinie dreaптъ шi între чеа trasъ din nou în лunguл ачелеiaшĭ marцinĭ. În казuл ачesta, reпresentat de Fig. 1, челе doъ лiniĭ trase în лunguл riглеĭ, шi trекînde prin челе doъ пunкte *a*, *b*, vor лъsa între еле un лок гол îndoit de kît кurбъtura riглеĭ noastre. Tot ачеasta s'ar fi întîmплаt daка riгла s'ar fi апliкаt ку konкаvitatea sa.

Riглеле лate sînt maĭ пuцin supuse ла strîmбare de kît verцелеле пъtrate; pentru къ ачestea se strîmбeazъ лesne de influinцa atmosfereĭ, în vreme че планшеtеле челе subцiri nu se пot strîmбa în dungъ. Еле пot, într'adevър, sъ se skovîrdeze

de ȣmezeалъ saȣ̆ de кълdȣръ; dap ачest efeкt фъкînдȣ-se нȣмаĭ пе sȣпрафaцъ, коателе se фак лiniĭ dpenте кînd пȣнem piгла пе ȣn план. Кȣ toate ачestea, ачeste коате пot sъ нȣ fie лiniĭ dpente, daка piгла н'а fost вine лȣкратъ. Тревȣе dap sъ ле вepiфiкъm, къчĭ алt-фел не вom sȣпȣне ла о мȣлцime de грешелĭ, фъръ а ле кȣноаште opiцina, шi каре не вор îmпiediка преа мȣлt în eксекȣцiea fiгȣрелор каре чер пречisiea.

4. Кȣрвеле se desпapt în doъ класe. Ȣнеле нȣ пъzesк нiчĭ о леце în формареа лор, пentpȣ каре нȣ пot fi oвieктȣл цeometpieĭ; еле se нȣmesк кȣрве нереrȣлate: ast-фел sînt каpaктepeле tpase din întîmпларе de mîna ȣнȣĭ sкpiitop. Челе-лалte, нȣmite кȣрве цeoметpiче, sînt de о natȣpъ че штiinца о поате analisi, шi къpiia еа îĭ deskoпере пpoпpietъцiле: ast-феl sînt чipкonfepinцеле шi кȣрвеле кȣнoskȣte sȣвt нȣмеле de елiпs, de парабол, de iперболъ. Орвiтеле планetape sînt елiпsȣpĭ.

Теоriea *n*° 5.

5. Dȣпе definiцiea планȣлȣĭ, пȣtem вepifiка daка о sȣпрафaцъ este планъ, saȣ̆, кȣm zik de обште, în нiвелъ, întinzînd ȣн фip пе каре sъ'л плimвъm în ачeastъ stape în toate sensȣpiле. Zidapiĭ нȣн astфел пе zid о piглъ каре поate pепpesenta о лiniе dpeaпtъ, dȣпе че маĭ întîiȣ̆ se ва вepifiка dȣпе ȣнȣл din modȣpiле пpeчedente.

Teoriea n° 7.

6. Ȣнгіȣріле sînt împреȣнъ кȣ лінііле, елементеле tȣtȣлор fігȣрелор. Пропріetъціле лор se вор desволta tрeпtat în шірȣл аплікаціілор. Noї вом чіta аічї нȣмаї infлȣінца ȣнгіȣрілор asȣпра efекtелор fisiче. Eatъ екsемпле:

1° Daка о гюлеа ва лові оБлік ȣн zid репреsentat прін лініеа GH (Fig. 2), dірекціеа мішкърії fiind în лȣнгȣл лȣї PH, пȣtереа че ва întребȣінца înпротiва zidȣлȣї, ва fi маї пȣцінъ de кît daка ’л ар лові întр’о dірекціе перпеndікȣларъ, ші, în ценерал, efекtȣл ва варіа кȣ ȣнгюл de інчіdінцъ a. Максімȣм пȣtерії este кînd ачеst ȣнгіȣ este dрепt, ші вом demonstра маї înколо (14) къ пȣtереа ловірії продȣsъ de проіекtілъ, sȣБt інчіdінца α se аре кътре ачееа каре о ва екsерsa sȣБt інчіdінца перпеndікȣларъ :: PH : PG; de ȣnde реsȣлtъ къ, sȣБt ȣн ȣнгіȣ преа мік, efекtȣл ва fi нȣмаї о fракціе foapte мікъ din efекtȣл total че ва продȣче ловіреа în чіркоnstънціiле чеде маї fавораБіле.

2° Se dімоnstреазъ în fisiкъ къ se фаче în fȣndȣл окюлȣї, пе реtінъ, о імацінъ de оБіекtеле възȣtе în denъртаре, asеменеа кȣ ачеле оБіекtе, ші îмБръкаtъ кȣ колоареле лор. Fie dреапtа AB (Fg. 3.) ȣн оБіекt пȣs înaintea окюлȣї; імаціна sa se ва fорма пе реtінъ în лȣнгȣл лȣї ab, пȣнкtȣріле a, b fiind detерміnate прін întîлніреа ачеsteї менБране ші а разелор Aa, Bb, каре проче d din esтреміtъціле оБіекtȣлȣї ші трек прін чеntрȣл лȣмінеї. Ȣнгюл AOB se нȣмеште ȣнгюл опtік; ел варіеазъ кȣ distанца оБіекtелор; ші, ка чел екȣал кȣ dinsȣл

пов, каре варіеазъ tot în ачелаші кіп, detepminъ мъріmea imaцinei че se фаче пе реtinъ, аша dap de ла мъріmea ѹнгюлѹї onlik depinde мъріmea апаpentъ а обіектелор.

Съ сѹпѹnem къ AB se denъpteazъ de окю, ші еа nosiцie în CD: Ѹнгюл onlik COD este înbedepat maї mik de кіт пречеdentѹл, ші pazele візѹале челе нѹе фак în окю о алтъ imaцinъ *cd*, maї мікъ de кіт *ab*, ші каре требѹе съ факъ съ ні se паръ CD maї mik de кіт AB. Аша, ѹn ачелаші обіект требѹе съ ні se apate кѹ atît maї mik кѹ кіt se denъpteazъ maї мѹлt, ші eatъ пеntpѹ че лініїле параллеле, алееле de копачї, spre esemплѹ, ні se пар къ se апропіе întpe dînsele. Челе доъ лърцимї екѹале AB, CD ва требѹі съ ні se apate în pапортѹл ѹнгюрілор лор *ab*, *cd*, ші лърцimiле intepmediape, кѹ toate къ екѹале întpe еле, вор авеа imaцine de мъріmї неекѹале, копрinse întpe *ab* ші *cd*. Imaцinеле, кътре ачестеа sînt ръstѹpmate în окю, dap обіектеле требѹе съ se apate dpente, пеntpѹ къ deosebiteле лор пѹнкtѹpї se sokotesk пѹse ла estpemitatea pazелор че ле tpimit, ші прin ѹpmape în nosiцiea лор чеа adeвъратъ.

Теоriеа *n°* 8.

7. Челе патрѹ прінчіпѹрї але ачестѹї пѹтър, sînt întp'о некоntenitъ întpeбѹinцаре în demonstpaцiї; еле не даѹ înкъ ші апликаціїле ѹpmътoape:

Мъріmea ѹнѹї ѹнгю dpent fiind о кітіme statopnікъ, ва fi лesne tot d'аѹна съ фачем ѹнгюрї dpente прin ажѹtopѹл ѹнѹї ѹнгю dpent solid, а кърѹіа о латѹръ fiind pezimatъ пе о лініе dpeantъ, чеа-лалтъ

ва fi dipeкціea пеpпendiкȣлаpeĭ. Ȣn ast-feл de instpȣment se нȣмеште екеp: eл este tinapȣл tȣtȣлоp ȣнгюpiлоp dpente че пȣtem tpaце пе ȣн плaн.

Екepeлe sînt, saȣ de tot solide, пpeкȣм чеде de лemn, de apamъ, de кpistaл, saȣ maĭ ȣшоаpe, пpeкȣм чeлe de пepгament шi de xîptie. Înлesnipea шi eksaktitatea кȣ кapе se пot faчe aчeste din ȣpmъ не îndeamnъ sъ лe pекоmandъm пpea мȣлt. Еле sлȣжesк кътpe aчestea a вepifiка eкepeлe solide. Еatъ кiпȣл кȣ кapе se faк:

Аплікъм пе о foae de xîptie о piглъ пpea dpeaптъ, în лȣнгȣл къpiia faчem sъ алȣнече кȣ гpiжъ вîpfȣл ȣнȣĭ вpiчeaг. Мapцinea foiĭ тъeте este atȣнчĭ eksaкt о лinie dpeaптъ. Îndoeште xîptiea аплiкînd ȣна neste алta чeлe doъ пъpцĭ алe aчesteĭ лiniĭ dpente, eкȣaлe saȣ нȣ, шi, пȣind piгла пе aчeastъ лinie îndoitъ, калкъ кȣ ȣнгiea îndoitȣpa xîptii, че о веĭ ціне вine întinsъ. Aчeastъ îndoitȣpъ ва fi înвеdepat о пеpпendiкȣлapъ пе чеа d'întîĭȣ dpeaптъ, пentpȣ къ чeлe doъ ȣнгюpĭ de xîptie че se faк, потpiвindȣ-se кȣ totȣл, sînt eкȣaлe, шi пpin ȣpmape dpente. Вом însemna dȣпе aчeasta, кȣ вîpfȣл вpiчеагȣлȣĭ, doъ пȣнtȣpĭ пе aчeastъ пеpпendiкȣлаpъ; апоĭ пȣind piгла пе aчeste doъ пȣнtȣpĭ, вом тъia iаpъш xîptiea în лȣнгȣл aчesteĭ piгле. Вом авеа ast-feл ȣнȣл ва шi doъ екеpe foapte eksaкte, шi пе кapе ле вом despъpцi dȣпе вое de чеea-лaлтъ xîptie.

Ка sъ не sлȣжim кȣ dinsȣл, пȣнem ȣна din лatȣpe пе лiniea xîptii пе кapе воiш sъ pidiкъм о пеpпendiкȣлapъ ast-feл, în кît вîpfȣл екеpȣлȣĭ sъ fie eksaкt în пȣнкtȣл ȣnde вpem sъ faчем ȣнгюл dpent; dȣпе aчeasta însemnъм пе xîptie, кȣ кondeюл, ȣнȣл din пȣнкtȣpiле

лatврeĭ a dоа a екерблвĭ пе каре ĭл вош реtраце atвнчĭ. Пвнеш апоĭ рiгла пе ачеst ал dоiлеа пвнкt шi вiрfвл dat ал внгюлвĭ dрепt, шi пвtem плimба kondeюл каре ва tраце о перпенdiквларъ în лвнгвл рiглеĭ. Este de прisos sъ zічеm къ ачеаstа тревве sъ se afле, dвпе овiчеiв, пвцiн maĭ înкоачĭ de челе доъ пвнкtврĭ diректоаре, ка sъ лъsъm лок destвл kondeюлвĭ.

Пвtem, dвпе вн екер de хîрtie, sъ tъem вн екер de пергаment, каре, пе лîнгъ аванtацюрiле челвĭ d'întîiв, ва fi шi solid, шi ва fi вн etалон перманеnt пропрiв a верiфiка екереле solide. Кв toate ачеstea, шi ел тревве компараt din kînd în kînd кв вн екер de хîрtie, din прiчiна infлвенцiĭ че аре асвпра пергаментвлвĭ вмезеала аервлвĭ каре skimвъ вне-орĭ simцiвiл dimensiiле sале.

Маĭ este вн алt miжлок maĭ simплв шi maĭ tot аша de екsakt ка sъ верiфiкъm вн екер, шi каре шi ел este întemeiat пе definiцiea внгюлвĭ dрепt. Dвчем о линie dреапtъ AC, пе каре апликъm вна din лatвреле внгiвлвĭ dрепt a екервлвĭ, шi dвчем о dреапtъ BG în лвнгвл челеĭ-лалtе лatвре, ast-fел în kît ачеst внгiв sokotit de dрепt se afлъ калкаt пе хîрtie dвпе ABG. Întоарчем dвпе ачеаstа екервл, пвind чеа d'întîiв лatвръ пе BC: a dоа лatвръ тревве sъ koinчidъ înведеpat кв BG, daка внгюл екервлвĭ este dрепt; de se depъrteazъ, пвindв-se în лвнгвл лвĭ BD, este înведеpat къ екервл нв este екsakt, шi къ внгюл sъв se deosiвеште кв вн внгiв dрепt, în maĭ мвлt saв maĭ пвцiн, de kît жвmъtatea внгюлвĭ DBG. Zік în maĭ мвлt saв maĭ пвцiн, пенtрв къ, în казвл че свпвне fiгвра, внгiвл екерв-

лѕї ва fi askѕџit. În касѕл în каре ѕпгіѕл ва fi tешit, este лesne d'a bedea къ челе doъ позіції sѕкчesiве але екерѕлѕї вор da asemenea doъ лiніi diвергенte BD, BC, ал кърора ѕпгіѕ ва fi îndoit de кit ковîршіреа deskidepiї екерѕлѕї пeste ѕп ѕпгіѕ dрепt. (Fig. 4.)

8. Прінчіпѕл екѕалітъцiї ѕпгіѕрілор опѕse ла вîрf se апликъ ла întребѕinцареа instрѕmentелор кѕ каре мъсѕрът ѕпгіѕріле. Ѕпе-орї, indeксѕл алidadeї (34) ешind din semічерк, пѕ se maї поate чіti мішкареа sa ѕпгіѕларъ; dар atѕпчї, прелѕпџіреа sa ръміind пе лімб, ѕnde faче ѕп ѕпгіѕ опѕs ла вîрf, чіtim пе лімб валоареа ачеstѕia, каре este шi a ѕпгіѕлѕї че se afлъ afаръ.

(Teoriea *n*° 11).

9. Ачеst прінчіп sлѕжеште ка sъ dѕчem лiніi dрепte пріn ажѕtорѕл a doъ пѕпкtѕрї, пе хîрtie шi пе пъmînt.

1° Пе хîрtie, аплікînd пе челе doъ пѕпкtѕрї пріn каре трeбѕe sъ треакъ лiніea dреаптъ, о рiглъ верifiкatъ пріntр'ѕпѕл din міжлоачеле de maї sѕs. Dреапта че требѕe sъ dѕчem se котропеште кѕ dѕпга рiглеї, пентрѕ къ аре doъ пѕпкtѕрї комѕпе кѕ ea.

2° Пе пъmînt, daка лiніea че требѕe sъ dѕчem пѕ este преа лѕпгъ, întindem întpe пѕпкtѕріле date о sfoаръ кѕ църъші. Ачеаstъ операціе каре dъ înbedepat лiніea dреаптъ къѕtatъ, se întребѕinцеазъ în toate zілеле ла dрѕмѕрї, ла гръdinї шi ла zidiрї.

Daка din protiвъ лiніea dреаптъ este foapte лѕпгъ, прекѕm este алiniментѕл ѕпѕї dрѕm, ѕпѕї канал, шi în каре челе doъ пѕпкtѕрї date sînt визiбіле de ла

ѕнѕл ла алтѕл, не мѫлцѕміm a însemna ічї шi коло кiте-ва din пѕнктѕріле ачестеї лiniї dpeпте. Ѕпре ачеаѕта, пѕind окiѕл ла ѕнѕл din челе doѫ пѕнктѕрї date g (Fig. 5), шi ѕн жалон saѫ mѫiar dpenт ab în чел-л-алт пѕнкт; пѕнem ѕн ал doiлea жалон cd în intервал, ast-feл în кit sѫ se парѫ окiѕлѕї кѫ se котропеште кѕ чел d'întiiѕ. Aтѕнчї окiѕл шi челе doѫ mѫieцe se aфлѫ întp'ачееашї лiniе dpeaптѫ; шi, ка maї біне s'о deтерmінѫm, пѕнem maї mѕлте жалоане ast-feл în кit sѫ se парѫ a se котропi тoaтe кѕ чел maї deпѫртат. Dѕпе ачеаѕта пѕтem întinde sфорї de ла ѕн жалон ла алтѕл.

9. Ачест міжлок sѕпѕне чел пѕцiн doѫ персоане. De ва fi нѕmaї ѕна, ва ѕрmа în кiпѕл ѕрmѫтор:

Fie P, c челе doѫ пѕнктѕрї date; вom înfiџe în ачесте doѫ пѕнктѕрї doѫ mѫieцe, de нѕ авem вре ѕн обiект каре sѫ sлѕжеаскѫ de mip. Fie PS ѕн обiект d'ачелеа dѕпе каре требѕе sѫ не алiniem, шi ѕн жалон înfiпт în c; лѕкрѫторѕл ва лѕа în ѕрmа mѫiarѕлѕї o позiцiе ast-feл în кit mѫieцеле cd, PS sѫ se котропеаскѫ în раза sa візѕалѫ. Dѕпе че ва aфла ачеаѕтѫ позiцiе g, ва пѕне întp'însa ѕн mѫiar gh; dѕпе ачеаѕта se ва пѕне întpe пѕнктѕріле c, P, ast-feл în кit sѫ вазѫ котропindѕ-se челе doѫ mѫeцe cd, gh; позiцiеа sa ва determina атѕнчї локѕл ѕнѕї алт mѫiar ab, каре ва fi în алiniерea gcaP, пентрѕ кѫ челе doѫ пѕнктѕрї c, g, каре se aфлѫ пе лiniеа dpeaптѫ cP, ажѕнг ка sѫ o determineze. Пѕтem пѕне тoт кѕ кiпѕл ачеѕта op кiте mѫieцe вom воi întpe челе doѫ пѕнктѕрї P, c.

Кiпѕл d'ал doiлea sѕпѕне кѫ лiniеа Pc se поате прелѕнџi dinколо de ѕнѕл dintp'ачесте doѫ пѕнктѕрї.

De nȣ se noate aчeasta, лȣкрътoрȣл este siлit sъ aлерџе ла înчеркърĭ, nȣind ȣn жалоn *ab* maĭ în aлiniментȣл *c*P, шi ȣĭtîndȣ-se ла nȣнктȣл *c*, daкa *ab* s'ар пъреа коtропit кȣ *cd* шi PS. În касȣл контрарiȣ, ва nȣne пе *ab* кȣ о кîtime simџiбiл екȣалъ кȣ деnъртареа sa din лiniea *c*P, дȣnе aчeasta ва реînчене înчеркареа. Ȣn лȣкрътор îndemînatiк nȣ este siлit niчĭ о datъ sъ факъ maĭ mȣлt de треĭ înчеркърĭ.

Este de nрisos sъ sпȣiȣ къ лȣкрътoрȣл nȣ bizeazъ о datъ тъеџеле лȣĭ de кît nȣmaĭ кȣ ȣn окiȣ, не чел-л-алт џiindȣ'л înкis.

Kînd челе доъ nȣнктȣрĭ date nȣ se вýд ȣnȣл de ла чел-л-алт, алергъш ла ȣn miжлок че вом аръta maĭ ла вале.

10. Aiчĭ este локȣл de a аръta кiпȣл кȣ каре mъsȣрът лiniiле дрепте шi ле împърџim.

Пе пъmînt, nȣnem о ȣnime de лȣнџime кȣnosкȣtъ, sпре ексемnлȣ metрȣл, în лȣнгȣл лinii de mъsȣрат; nȣmърȣл de кîte орĭ aчeastъ лȣнџime este коnрinsъ întр'însa, se nȣmeшte mъsȣра лiniеĭ.

Se simnлiфiкъ mȣлt aчest кin, кînd лiniiле de mъsȣрат sînt преа лȣнџĭ, sлȣжindȣ-se кȣ ланџȣл inџinереsк. Aчest instрȣment este коmnȣs de zале дрепt лiniаре ȣnite прiн белчiȣџе, шi фъкînd о лȣнџime totaлъ de zeчe metре; фie-каре za este de доъ дечimetре. Кȣ ажȣtoрȣл лȣĭ, nȣtem mъsȣра преа iȣte, лȣînd în бъгаре de seamъ фракџiiле. Daка лiniea de mъsȣрат este прекȣрmatъ de вре о staбiлъ, деmtentъчiȣnea арnentoрȣлȣĭ iĭ ва да, дȣnе чiрконstърĭ, miжлокȣл de a околi греȣtatea; iaр de nȣ, ва требȣi sъ алерџе ла кinȣл че вом аръta maĭ ла

вале, ка сѣ тѣсѕрѣт о лinie de каре нѕ не пѕtem апропiea (61).

Пе хiрtie, лѕѣт пе компас лѕнџimea лinii de тѣсѕрat, шi о пѕнem пе тѣсѕрѣ солidѣ, прексm ѕн метрѕ. Dар ачеst кiп este рашплаsat преа авантаџios прin întребѕinџареа ѕнѕї instрѕment преа simплѕ. Instрѕmentѕл ачеsta este ѕн dѕбл ѕ dечimeтрѕ tѣiat пiezіш, пе марџineле кѣрѕia sînt însemnate de о парте чentimeтреле шi мiлiметреле, шi de чеа-лалtѣ тѣсѕрiле челе веле векї, деџете, лiniї шчл. Форма sа este înлеsнiчioasѣ спре а о аплiка în лѕнгѕл ѕнеї лiniї, пе каре чitim îndatѣ лѕнџimea; asemenea, ка сѣ фачеm о лinie de о тѣрime че воiш, требѕе s'о пѕнem нѕмаї пе хiрtie, шi сѣ însemnѣm кѕ окiї пѕнкtѕл че аратѣ instрѕmentѕл, ка кѣпѣtiiѕ ал лinii ачеsteia. Ачеasta se înџелеџе лесне нѕмаї din ведереа ачеstѕї мiк instрѕment, кѣ поate рашплаsа чеа маї мѕлtѣ вреше компасѕл, кѕ маре авантаџiѕ; пentрѕ кѣ deспре о парте, операџiea este маї скѕртѣ, шi апѣратѣ de челе doѣ греѕtѣџї че аре ачеasta, de а înџепа хiрtiea кѕ вiрфѕрiле sале, шi de а скiмба ѕне-орї, пе nesimџite, deскiдереа крачiлор сѣї.

Фак dѕбле dечimeтре de чiмiшiр, de аламѣ, de фiлdeш; ачеsta este ѕн instрѕment каре dѕпе слѕжбеле че не фаче требѕе сокоtit ка de întiia нечеsitate.

10. Bis. Пentрѕ ачееа че se atinџе de îмпѣрџitѕл лiniiлор, de требѕе сѣ îмпѣрџim о dреаптѣ пе пѣмînt în doѣ пѣрџї екѕале, операџiea se редѕче а întinde о сфоарѣ întре estремitѣџiле лinii, шi а

întoi în doъ ачеаstъ sfoapъ; atѕnчĭ ea ва къdea în mіжsокѕл лinii.

De тpeбѕeште sъ о îшпърцiш în maĭ шѕлte пърцĭ екѕале, тъsѕpъm лiniea, шi îшпърцind пѕтърѕл aфлat пpin пѕшърѕл пърцiлор чepѕte, лѕъm о sfoapъ de о лѕнцime екѕалъ кѕ кitѕл, шi о пѕнem пе лiniea daтъ de atitea opĭ de кite opĭ se ва конpinde.

Пе xîptie пѕtem întpeбѕinца ѕнѕл din ѕpшътоapeлe трeĭ кiпѕpĭ:

1° Вom фaче konstpѕкцiea de ла n^o 18, (Fig. 11), лѕînd de чentpѕpĭ amîndoъ estpeшiтъцiле dpenteĭ date. Перпendiкѕлара PG, тpeкînd пpin miжлокѕл dpenteĭ, îmплiнеште чepepea.

2° Din doъ пѕнкtѕpĭ A, B ка чentpѕpĭ (Fig. 22), шi кѕ о pazъ siшцiбiл екѕалъ кѕ жѕшътatea лѕĭ AB, deskpim doъ аpкѕpĭ каpe sъ tae пе AB în doъ пѕнкtѕpĭ *a*, *b*, пpea апpoaпе ѕнѕл de алtѕл. Лѕъm din окĭ miжлокѕл лор *o*, лѕкpѕ пpea лesne; шi ачеаsta ва fi miжлокѕл dpenteĭ AB.

Ачеаstъ konstpѕкцie este нѕmaĭ пе diбѕite; кѕ toate ачestea este пpea екsaктъ în пpактiкъ, шi maĭ simплъ de кit чea пpечedentъ. О pекomandъm кѕ denadinsѕл.

3° În sfipшit пѕtem întpeбѕinца dѕблѕл dечimetpѕ. Аплiкind ачest instpѕment пе AB, вom авea în miлimetpe лѕнцiшea ачеsteĭ лiniĭ. Îmпърцind пѕтърѕл пpin 2, вom пѕне pesѕлtatѕл пе BA.

Se веde къ пѕtem кѕ ажѕtopѕл ачеstѕĭ instpѕment, sъ îmпърцim о dpeaптъ întp'ѕн пѕшър оаpекаpe de пърцĭ екѕале. Fie dpeanta тъsѕpaтъ de 65 miлim $\frac{3}{4}$, а îшпърцi în шanтe пърцĭ, аiлъm 9^{mm}, 39 пentpѕ а 7-а napte а ачеstѕĭ пѕшър. Însemnъш а-

чeastъ лъnцime пe лinie, шi o пъртъm de шase opĭ dinколо de intiia nosiцie.

Bom înвъцa (65) ѕn miжлок цeometpiк ка sъ îmпърцim o dpeantъ intp'ѕn нѕmър oape-кape de пърцĭ екѕале; dap aчest miжлок, în пpaктiкъ, este maĭ пѕцin komod de кit пpeчedentѕл.

(Teoriea n^o 12, 13, 14, 15).

11. Aчeste dівepse пpoпosiцiĭ sînt neкontenit întpeвѕinцate în demonstpaцiĭ, шi adesea se aплiкъ ла pidiкapea плaнѕpiлop. Noĭ вom întpeвѕinцa n^o 13 ла demonstpaцiea ѕneĭ fiгѕpĭ în жокѕл вiлiapdѕлѕĭ (Fig. 6).

Fie o вiлъ B a o ловi кѕ вiла A, шi sъ sѕпѕnem къ se aflъ întpe aчeste doъ o a tpeia вiлъ C кape se oпѕne ла o ловiтѕpъ dpeantъ: tpeвѕe sъ ловeaskъ ла mandaneлъ. Tpeвѕe atѕnчĭ sъ вizeze ла mandaneла MD ѕn пѕнкt I, ast-feл în кit ѕnгiѕл de pefлeksie BID sъ fie екѕал кѕ ѕnгiѕл de inчindinцъ AIM, dѕпe ѕn пpinчiп de fisiкъ пpea кѕnoskѕt. Aшa, zічem къ, de вom dѕчe BO пepпendiкѕлap пe mandaneлъ, de вom лѕa пe пpeлѕнцipea sa OG=BO, шi вom dѕчe GA, пѕнкtѕл I ѕnde aчeastъ din ѕpmъ лinie tae mandaneла, вa fi пѕнкtѕл ла кape tpeвѕe sъ вizeze.

În adeвъp, чeлe doъ tpiѕнгiѕpĭ IOG, IOB sînt екѕале, пentpѕ къ aѕ ѕn ѕнгiѕ екѕал кoпpins întpe лatѕpe екѕале ѕna alteia: къчĭ ѕнгiѕpiле în O sînt екѕале, ка dpente, IO este o лatѕpъ komѕнъ, шi OG=BO din кonstpѕкцie. Aшa dap ѕnгiѕл GIO este екѕал ѕnгiѕлѕĭ OIB; aшa dap aчesta este asemenea

еквал кпгікляї MIA, каре fiind опяs ла вîрf ляї GÎO, ії este еквал. Аша dар челе доъ кпгіврї interioаре пяпктяляї I sînt еквале; аша dар, dака біла A ва лові în I, еа se ва resfrînde în dirекціеа IB. Пяtem лesne demonstra къ ачеаsta ня se поаte întîmпла în ор че алt пянкt ва лові afаръ de пянкtял I. Dар поï sяпяпеш къ біліardял este жяst.

Ка sъ коборîш перпеndікялара BOG, вот алерга ла тіжлокял аръtаt маï ла вале (18, 2°), ші не вот ажяtа de ачеsta ка sъ întindem о sfoаръ din G în A, saў маï simпля, вот пяне пе біліаrd яп цоп în лянгял drептеї BOG, пе каре îл вот skоаte de о лянціme OG = OB; ші візînd din пянкtял A ла estremitatea цопялї, вот лові ла mandaneлъ пянкtял I.

Ачеst тіжлок аре пеtъгъdяіte греятъцї fisiче de ексекяціе; dар еатъ яп тіжлок преа simпля ка sъ îмпліпіш ачеаsta. Sъ пяпеm ла mandaneлъ în O о огліпжоаръ вертікалъ, ші sъ візът din пянкtял A кіпял білеї *b* възяtъ în огліпжоаръ, вот лові mandaneла în пянкtял I, каре ва trimite біла A asяпра ляї B. Ачеаsta este întemeiatъ пе ачеа леце fisiкъ кяпоskятъ, къ яп обіекt se zяграъвеште în оглindъ întр'о distанцъ înапоï еквалъ кя distанца sа înainte, ші пе перпеndікялара коборîtъ din обіекt în оглindъ. Біле B îшї ва авеа імаціпа sа în пянкtял G, че determinаръm маï sяs, ші каре îмпліпеште ачеаstъ îndoitъ kondiціе.

(Teoriea *n°* 20).

12. Прin ачеst прinчіп se поаte determina, fъръ а тъsяра, каре din челе доъ лаtяре пеапро-

пieat AC, BC (Fig. 7) але ꙋпꙋĭ triꙋпгiꙋ este чea maĭ mape: este destꙋл sпpe aчeasta sъ пꙋtem mъ-sꙋpa кꙋ ꙋп grafometpꙋ ꙋпгiꙋpiле în A шi în B.

(Teoriea n^{o} 21).

13. Aчest n^{o} este ꙋп пpiнчiп fondamentaл în Џeometpie; кꙋ toate aчestea пꙋ ape вpe o aплiкaџie sпeчiaлъ.

(Teoriea n^{o} 22).

14. Aчeastъ пpoпosiџie шi кopoлapꙋл sъꙋ пe вop sлꙋжi ла demonstpaџiea ꙋпeĭ teopiĭ fisiчe foapte impoptante.

Sъ sꙋпꙋпem doъ пꙋtepĭ лꙋкpînd asꙋпpa ꙋпꙋĭ mo-biл m, (Fig. 8), ast-feл în кît еле sъ'л fакъ sъ пe-tpeaкъ, ꙋпa лiniea mA, чeea-лaлтъ лiniea mB, tot întp'atîta вpeme, întp'o seкꙋndъ, sпpe eкsemплꙋ, daкa fie-кapе ap лꙋкpa sinгꙋpъ, dipeкџiiле miшкъ-piлop fiind пepпendiкꙋлapе întpe еле. Mobiлꙋл, кa-pе пꙋ пoate ꙋpma aчeste doъ dpꙋmꙋpĭ de o datъ, se вa sꙋпꙋпe, кît se вa пꙋtea, ла amîndoъ пꙋtepi-ле, ast-feл în кît пъpџiле aчestop doъ efeкte, кapе вop fi кomпatibiле se вop пpodꙋчe de o datъ. Aшa, пꙋtepea mA se siлeшte a deпъpta mobiлꙋл în dipeк-џiea mB, de o кîtime eкꙋaлъ лꙋĭ mA, în вpeme de o seкꙋndъ; шi пꙋtepea mB, îл zopeшte a se deпъp-ta, întp'aчeлaшĭ timп, de dipeкџiea mA, de o кîti-me $= mB$. Aшa, aчeste doъ efeкte вop eкsista de o datъ daкa mobiлꙋл, лꙋînd o dipeкџie intepmediapъ, вa пetpeчe diaгoнaлa mD a dpeпtꙋпгiꙋлꙋĭ fopmat пe mA, mB, шi вa ajꙋпџe în пꙋпкtꙋл D ла împлinipea

21

sekȣndeĭ; пentpȣ къ atȣnчĭ este îmbedepat depъptat de чеle doъ dipekцiĭ iniцiale ale kitimilop чepȣte de чеle doъ пȣtepĭ, шi пȣnktȣl D este sinrȣp kape împlineшte aчeste kondiцiĭ. Аша dap daka doъ пȣtepĭ, лȣkpînd de o datъ asȣпpa aчелȣiaшĭ mobil, în dipekцiĭ dpentȣnrĭȣлape, se пot pепpesenta, пentpȣ kîtimea efektелop лop, пpin чеle doъ лatȣpe ale ȣпȣĭ dpentȣnrĭȣ, efektȣл че pesȣлtъ din kombinaцiea akцiiлop лop va fi pепpesentat, în mъpime шi în dipekцie, пpin diaronaлa dpentȣnrĭȣлȣĭ.

Чеle doъ пȣtepĭ mA, mB se пȣmesk komпȣitoapеле; diaronaлa mD este pesȣлtanta; ea este пpodȣsȣл komпosiцii пȣtepiлop.

Dap daka doъ пȣtepĭ dpentȣnrĭȣлape se пot komпȣne întp'ȣna sinrȣpъ kape pепpesentъ efektȣл лop, asemenea шi o пȣtepe sinrȣpъ saȣ ȣn efekt ȣnik pепpesentat пpintp'o лinie se пoate deskomпȣne întp'алte doъ, sȣbt dipekцiĭ dpentȣnrĭȣлape; saȣ алt-feл, fiind datъ o лȣnцime pепpesentînd sпaцiȣл че пetpeче întp'o sekȣndъ ȣn mobiл soлiчitat de o пȣtepe ȣnikъ, пȣtem tot d'aȣna sȣпȣne къ aчeasta este efektȣл пpodȣs din komпosiцiea a doъ пȣtepĭ kape se siлeaȣ sъ fakъ ka ȣn mobiл sъ пetpeakъ, întp'o sekȣndъ, чеle doъ лatȣpe ale ȣпȣĭ dpentȣnrĭȣ a къpȣiea лinie dpeaптъ datъ va fi diaronaлa Pъmîne akȣm sъ oпepъm aчeastъ deskomпosiцie, saȣ sъ faчem aчest dpentȣnrĭȣ, чеea че se пoate sъвîpшi întp'o mȣлцime de kiпȣpĭ dintpe kape aлeцem пe aчеla че se kȣvine лa чipkonstanцъ. Eatъ eksemпле:

15. Sъ sȣпȣnem къ AB (Fig. 9) pепpesentъ dipekцiea opizontaлъ, шi SB пpofiлȣл ȣпȣĭ плaп înkлinat пe kape se afлъ ȣn tpȣп rpeȣ.* Гpeȣtatea a-

честѕї трѕп este о пѕtере вертікалъ аплікатъ în чентрѕл съѕ de гравітate *g*. Sъ репресентъм ачеаstъ греѕtаte прін лѕнџімеа *g*P, în sensѕл че am хотърît zічерії пѕtере, ші sъ deskompѕnem ачеаstъ пѕtере în doъ алтеле. Sпре ачеаsta, sъ ne închіпѕім *gk*, *gf* респектів перпендікѕларъ ші паралелъ ла планѕл înклінаt; se dѕчем P*f*, PK паралеле ла *g*K, *gf*, вom авеа înвеdераt ѕп dрептѕнгію а кърѕіа *g*P ва fi diагонала Аша dар пѕtem sокоti къ греѕtatea трѕпѕлѕї este рампласатъ прін акціеа а doъ пѕtерї dрептѕнгіюларе *g*K, *gf*, каре, конформ кѕ чеea че am арътаt maї sѕs, вор продѕче ачелашї ефект.

Însъ din ачесте doъ пѕtерї, ѕna *g*K se desfiinцеаzъ de резістанца планѕлѕї, tot кѕ кіпѕл ачела кѕ каре se nіmічеште греѕtatea, кînd ѕп трѕп se афлъ пе ѕп план орizontал, пе каре греѕtatea este перпендікѕларъ. Аічї este în енерціе пѕmaї пѕtереа *gf*, ші трѕпѕл este solічіtat a петрече ачеаstъ лѕнџіме tot în тімпѕл ачела че ар fi петрекѕt пе *g*P în пѕtереа греѕтъцiї totaлe Аша dар ачеаsta este desfiinцатъ în парtе пе ѕп план înклінаt, пентрѕ къ перпендікѕлара *gf* este maї skѕртъ de кît облікa *g*P, ші пѕtереа енерцікъ поаtе fi пѕmaї о фракціе пре а мікъ а греѕтъцiї totaлe. Чеea че se întîmплъ кînd планѕл este пре а înклінаt.

16. Dірекціеа пѕtерії енерціче не есплікъ пентрѕ че sімцім греѕtate a ne sѕі пе ѕп deал, ші пентрѕ че, din протівъ, sîntem îmбрînчіцї кобоrînds-ne maї юте de кît врем. În казѕл d'întîю, noї ne лѕптъм în протіва ѕнеї пѕtерї каре лѕкреаzъ în sens контрарію, de ачі sілінцеле mѕskѕларе каре прічінѕеsk осtенеала; în казѕл d'ал doi-

леа, поĭ требзе съ пе коворîm фъръ чеа шаĭ mікъ sілъ, ші пзтаĭ frекареа пічіоарелор пе пъmînt пе поate џіне în екзілібрз пе коаstъ.

17. Am zis шаĭ sзs къ о проіектілъ ловіnd піеzіш зп план, перde о парте din efектзл съй, ші кз atît maĭ mзлt кз кît зпгюл de înчіndinџъ este maĭ mік; чееа че вом deшonstpa tot прin аческе прinчіпзрі. Fie BI (Fig. 10) dірекџіеа проіектілеĭ; I пзнктзл зnde zidзл este ловіt; съ репрезеnтъm прin ID пзтереа кз каре zidзл este ловіt, ші съ deskoмпзnem ачеаstъ пзтере întр'алте доъ; зпа IC перпеndiкзларъ пе план, чееа-лалтъ IG dіріжатъ în лзпгзл zidзлзĭ însзшĭ, ші съ ізпръвіm dpeпtзпгюл CDGI. Efектзл требзе съ fie ачелашĭ ші daка пзнктзл I ар sзfepі акџіеа amîndзрор пзтерілор IG, IC. Аша dар, чеа d'intîĭ алзпекînd пе zid, нз поate коntрівзі а'л sгзdзі; аша dар sіла se редзче ла коmпзsitoapea IC, неапърат maĭ mікъ de кît піеziша ID; аша dар піеzішitатеа зпеĭ акџіĭ о nimічеште în парте, ші кз atît maĭ mзлт кз кît зпгюл de înчіndinџъ este maĭ mік.

(Теоріеа *n*° 18, 24).

18. Ачеste доъ пропозiџiĭ пе daŭ mзлте апліkaџiĭ imпортante; dintр'ачеstea skoatem mіжлокзл de a dзче о перпеndiкзларъ ла о dpeaптъ прintр'зп пзнкт dat, saŭ пе ачеа dpeaптъ, saŭ afаръ.

1° Прintр'зп пзнкт лзат пе dpeaптъ.

Konstpзкџіе пе хîртіе. Лзъm ла dpeaпта ші ла stînга пзнктзлзĭ dat P (Fig. 11) доъ лзпџimĭ арбітраріĭ, dар екзале, PA, PB; dзпе ачеаsta

din пѫнктѹріле A ші B ка чентре, кѹ о дескідере де компас маї маре де кіт жѹмътатеа лѹї AB, вом дескріе доъ чірконферінце, саѹ маї сімплѹ доъ аркѹрі каре съ се тае ін доъ пѫнктѹрі C, D. Ѹн пѫнкт оаре-каре дін ачестеа ѹніндѹ-се кѹ пѫнктѹл P, ва да перпендікѹлара каре требѹе съ треакъ прін чел-л-алт пѫнкт, каре ва слѹжі де веріфікаре. Ачест мод есте інтемеіат пе ачеаста къ пѫнктѹл C фіінд імведерат д'о потрівъ депъртат де челе доъ пѫнктѹрі A ші B, есте ал перпендікѹлареї рідікате ін міжлокѹл лѹї AB; аша дар есте ал ачелеї че трече прін пѫнктѹл дат P.

Дака пѫнктѹл P ар фі фост ла естреміттатеа ѹнеї дрепте, нѹ с'ар фі пѹтѹт д'о датъ а се ексекѹта ачеатъ констрѹкціе, дар се фаче пѹтінчіоасъ прелѹнџінд дреанта. Вом да маї ла вале міжлокѹл де а не апъра де ачеастъ дін ѹрмъ препараціе каре есте кіте о датъ нестe пѹтінцъ.

Есте імведерат къ ін тоате касѹріле пѹтем ін локѹл констрѹкціілор пречеденте съ сѹбстітѹім інтребѹінцареа екерѹлѹї.

К о н с т р ѹ к ц і е п е п ъ м і н т. Дѹпе че вом лѹа ла дреанта ші ла стінга пѫнктѹлѹї P (Fig. 12) доъ лѹнџімі екѹале PA, PB, вом інџенені ін пѫнктѹріле A, B кѹ църѹшї естреміттъціле ѹнеї сфорі, пе каре о авем імпърціtъ ін доъ пърцї екѹале, ші ал къріiа міжлок есте інсемнат кѹ ѹн нод. Вом інтінде ачеастъ сфоаръ тръгінд-о де нод; посіціеа N че ва лѹа ачест нод пе пъмінт ва фі ѹн пѫнкт ал перпендікѹлареї каре їші ва авеа пічіорѹл ін пѫнктѹл P; пентрѹ къ N есте д'о потрівъ депъртат де пѫнктѹріле A ші B; аша дар лініеа PN ва фі перпендікѹлара черѹтъ.

Вом da maĭ tîpziȣ modȣл че требȣе sъ întrebȣ-inцъm kînd пȣнktȣл P este ла estpemitъцiле ȣneĭ dpente kape нȣ se поate прелȣнцi.

2° Прintр'ȣn пȣнkt лȣat afapъ dintp'o dpeantъ.

Konstpȣkцie пе xîptie. Din пȣнktȣл dat P (Fig. 13) ka чentpȣ, шi кȣ o deskidepe de komпas îndestȣл de mape, sъ deskpiш ȣn apk de чepk kape sъ tae dpeanta datъ în doъ пȣнktȣpĭ A, B. Dintp'aчeste doъ пȣнktȣpĭ ka чentpȣpĭ, кȣ o detkidepe maĭ mape de kît жȣmъtatea лȣĭ AB, вom deskpi doъ apkȣpĭ kape sъ se tae întp'ȣn пȣнkt G; sъ ȣnim PG, шi вom aвea пepпendikȣлapa чepȣtъ. În adeвъp, fie-kape dintp'aчeste doъ пȣнktȣpĭ P, G, sînt d'o potpiвъ depъptate de estpemitъцiле лȣĭ AB.

În локȣл konstpȣkцii цeometpiчe пȣtem sȣбstitȣa întpeбȣinцapea ekepȣлȣĭ. Вom пȣne ȣna din латȣpe-ле лȣĭ пе AB, шi o вom tpaце пе aчeastъ linie пîнъ kînd чeea-лалtъ латȣpъ вa întîлni пȣнktȣл P; atȣnчĭ вîpfȣл ȣnгюлȣĭ dpent ал ekepȣлȣĭ вa fi пiчiopȣл пepпendikȣлapeĭ.

Konstpȣkцie пе пъmînt. Aчeastъ kon-stpȣkцie este foapte simплъ; înцepenim o sfoapъ în P (Fig. 14), шi o întindem пînъ че вa întîлni dpeanta în пȣнktȣл A, пе kape îл însemнъм. Întinsъ din noȣ, ea întîлneшte iapъшĭ dpeanta întp'ȣn ал doiлea пȣнkt B; лȣъm mijлокȣл лȣĭ AB кȣ o sfoapъ întinsъ întpe A шi B, шi îndoitъ în doъ. Fie Q mijлокȣл, liniea PQ вa fi пepпendikȣлapa (18).

Aчeste diвepse konstpȣkцiĭ sînt пpea întpeбȣin-цate. Челе че am apъtat kъ faчem пе xîptie, не ажȣtъ sъ faчem toate fiгȣpeле че konpind ȣнгюpĭ dpente, пpeкȣm snpe eksemплȣ, kadpeле desemne-

лор. Пе пъmînt traцem în ѹнгюрї dрепtе dipекцiiле zidѹpiлор, saѹ de кѹрцї, saѹ d'înъѹntpѹл edifiчелор; în гpъdinї ле întpeбѹinцъm ка sъ facem пъtpateле шi бpazdeле; în apпentaцiѹ, ле întpeбѹinцъm пentpѹ determinaцiea пpea imпoptantъ a înълцiшiлор figѹpелор (44), кapе sint елementелe esenцiaле пentpѹ калкѹлatѹл sѹпpafeцелор.

În sfîpшit, кind пepпendiкѹлapелe tpeбѹe sъ fie пpea mapї, ка sъ ле traцem ne.sлѹжim кѹ гpafometpѹл, dѹпе кѹm o вom desлѹшi ла локѹл sъѹ (44).

(Теоriea *n*° 29 — 34).

19. Ачeste diвepse пpoпpietъцї sлѹжesк de бaѹpї ла o mѹлцime de demonstpaцiї, шi sint mѹлt maї fолositoape întp'ачest panopt de кit întp'aл пpaкtiчеї. Кѹ toate ачestea miжлoaчеле de a traцe паpалелеле, ла кapе вom pestpînцe întpeбѹinцъpiле ачеsteї teopiї, sint destѹл de imпoptante.

Пе xîptie, aвem adesea tpeбѹinцъ sъ dѹчеm паpалелe ла dpente шi пpin пѹнкtѹpї date, maї aлes în figѹpелe че înfъцiшeз плanѹpї, în епѹpiле Цеometpiї deskpiptiвe, apшitektѹpeї ш ч л. Пе пъmînt, кѹ паpалелe facem dpѹmѹpiле, tpotoapелe, шoseлеле, кanaлѹpiле, кѹpцiле, aлeeлe din гpъdineлe пѹбліче шi пъdѹpї; бpazdeлe, плantaцiea în лinie a pomiлор. În sfîpшit, desemnѹл diвepseлор пъpцї aле клъdipiлор, кadpeле fepestpeлор, тъерea пietpeлор, oapeкapе лѹкpъpї de tîmплъpie шi de dѹлгepie, комбinъ ажѹtopѹл паpалелелор кѹ aл пepпendiкѹлapлор.

Sъ ne пponѹnem dap a adѹче, пpintp'ѹn пѹнкt dat, o паpалелъ ла o dpeaптъ datъ.

1° Пе хîртiе. Fie AB (Fig. 15) dpeanta, шî P пънктъл dat; вom dъче sекanta оаре-каре PB. Din пънктъл B ка чентрв, кв о deskidepe de компас d'о потрiвъ лвî BP, вom deskpie аркъл PA. Dъпе ачеаsta, din пънктъл P ка чентрв, кв ачееашî deskidepe, вom deskpie вn арк петърцinit пе каре вom лва BI = PA; dъкînd PI, вom авеа паралела черътъ.

În adeвър, dъпе кът вom аръta maî depapte (30), вnгюрiле B, P sînt еквале; dap еле sînt алтерпе interпе; аша dap PI este паралелъ.

Ал doiлеа mod. Dъчem кв екеръл о перпendiкъларъ AQ (Fig. 16) пе AB; dъпе ачеаsta, прin ачелашî тiжлок, о перпendiкъларъ QR пе AQ; ачеаsta ва fi îmвedepat паралела черътъ.

20. În sfîрmit, maî întрeвъinцът вn ал treiлеа mod, каре este чел maî inлesnitop. Fie P (Fig. 17) пънктъл dat. Пънem пе лiniеа dpeaпtъ AB вna din латвреле AG але вnвî екер, dъпе ачеаsta ашеzъm о лiniе KR пе а doа латвръ AS а екеръvлвî, шî траџem ачеst instpвment în лъпгвл лiniî пеmiшкътоаре пînъ кînd латвра AB ва întîлni пънктъл P. Dъкînd апоî о dpeaпtъ A′G′ în лъпгвл ачеsteî латвре, ачеаsta ва fi паралела кътатъ.

Este лesne de къnoskвt, întр'ачеаstъ елеrantъ шi лesne konstpвкџie, doъ перпendiкъларе ла о ачееашî dpeaпtъ каре este dъпга pirлеî. Пътem траџе ор каре алт вnгiв în лъпгвл pirлеî, шî konstpвкџiea se ва întemeiа пе потрiвiреа вnгюрiлор кореsпвпzътоаре. Кînd авem съ dъчem maî мвлте паралеле ла о ачееашî dpeaпtъ, вom траџе екеръл, шi'л вom oпрi пе diверseле пъпктврî аналоаџе ла P. În казвл аче-

sta, modѕл este кît se поate de esпeditif. Noĭ peкomandъm întpeбѕinцapea aчestѕĭ miжлok komod maĭ mѕлt de кît toate чeлe–лaлte.

2° Пе пъmînt. Чeл maĭ бѕn mod este a кoбopî d'întîiѣ o пepпendiкѕлapъ PS (Fig. 18) пе dpeanta datъ; dѕпe aчeasta întp'ѕn пѕпкt R кît se ва пѕtea de deпapte, pidiкъm o aлtъ пepпendiкѕлapъ пе кape лѕъm RG = PS. Dpeanta PG ва fi паpaлeлъ din пpiчina distanцeлop eкѕaлe. Кѕ кiпѕл aчesta se faк aлeeлe шi dpѕmѕpiлe.

21. Însemnape. Faчem aiчĭ, în tpeaкът, o oбsepвацie кape se апліkъ лa toate кoпstpѕкцiiлe, fie пе xîptie, fie пе пъmînt. Кînd o dpeaпtъ tpeбѕe sъ se detepшine пpin doъ пѕпкtѕpĭ, tpeбѕe sъ faчem ast-feл кa eлe sъ se afлe кît se ва пѕtea maĭ deпъptate; se înцeлeцe кѕm лiniiлe sînt шaĭ бine detepminate кѕ кiпѕл aчesta.

22. Daкa паpaлeлa tpeбѕe sъ fie пpea лѕпгъ, шi înкъ daкa пѕпкtѕл dat este пpea deпъptat de dpeanta, вom aлepгa лa гpafoшetpѕл, dѕпe кѕm o вom esпліka maĭ înкoлo (46).

23. Пentpѕ опepaцiiлe чe faчem asѕпpa zidѕpiлop, пetpeлop, skîndѕpiлop, пе пѕtem sлѕжi tot–d'aѕпa кѕ aвantaцiѕ de îndoiteлe пepпendiкѕлape. Dap eatъ modѕл кape se пape maĭ întpeбѕinцat.

Fie A (Fig. 19) o піatpъ пе кape se чepe sъ tpaцem în пѕпкtѕл p o паpaлeлъ лa ѕпa din mapцinĭ. Вom dѕчe пpea aпpoaпe de dînsa шi паpaлeл, пѕmaĭ din oкĭ, o dpeaпtъ ab, dѕпe aчeasta кѕ o deskidepe de komпas кoпвeпaбiлъ шi din пѕпкtѕл p кa чentpѕ, вom deskpi ѕп apкѕлeц a tanцent лa dpeanta ab. Кѕ aчeeaшĭ deskidepe, шi dintp'ѕп пѕпкt

оаре-каре *b* лsat пе dpeanta, deskpim sn аркsлец *g*; шi dsкînd о dpeanть *pg* tanцenть ла ачest аркsлец, афлъm паралела черsть. Ачest шod este întemeiat în teopie пе потpівipea distanцелор пsnktspiлор челор dоъ паралеле.

În sfipшit, în операцiiле de dsлгepie, dака паралелеле tpевsesк съ fie вертiкале, se слsжesk ка съ ле detepmine, de fipsл кs плsmв каре pemîne паралел кs sineшï în toate skimвъpiле de nosiцie.

(Teoriea *n*° 33).

24. Ачest npinчiп este преа msлt întpeвsinцat în teopie. Eatъ sna din аплiкацiiле сале.

De воim съ mъsspъm sn sнгis format de dоъ dpente, каре tpeк npin овiектe de оаре каре волsmin, прекsm пomï, kase, saš шaï віne format npin dipeкцiiле а dоъ zidspï (Fig. 20), ns nstem nsne instpsmentsл în віpfsл sнгisлsï. Ка съ skъпъm de ачeastъ гpestate, nsnem instpsmentsл în *o* пsцin depъptat de віpfsл sнгisлsï, шi вizъш челе dоъ пsnktspï G, H пsse în distanцe simцiвiл еksале de лiniiле каре копpind sнгisл de mъsspat. Ачeastъ потpівipe de distanцe detepminъ niшte dpente паралеле кs латsреле sнгisлsï, шi npin spmape sнгisл mъsspat este еksал кs ачела пе каре n'am nstst съ пе nsnem.

(Teoriea *n*° 35).

25. Ка съ deskpim о чipкonfepinцъ пе хîрtie, пе слsжim кs instpsmentsл кsnoskst de toatъ лsmea ssвt nsme de кошпаs. Ssnsind fiksъ deskidepea

крачілор, dinstanца челор doъ вірfsрї este раzа черкзлзї. Ne sлзжім шi кз компасзл кз креіоn ка sъ траџем черкзл пе пietре, zidsрї, лзкрзріле de tinплъріe.

Пе пъmînt, о sfoарь întinsъ, шi înвîрtindз-se împрежзрзл зnзї џързш de каре se џine зna din тър џіnile sале, deskpie кз чеea-лаltъ estpemitate о чіркоnferinџъ пе каре зnе-орї не тълџзтim нзmаї а о жалоnа.

Фачереа чіркоnferinџелор не xîptie пentpз tot felзл de desemn este аша de deasъ, in кît este de npisos a maї чita ексеmпле. În konstpзкџiї, deskpim пе zidзрї чіркоnferinџе пentpз орnamente, окїз ла îmвеліш, аркзрї ла порџї, ла fepestpe, ла аркаde; tae черкзit шовіла; mese de шартзръ, rizdзрї de пзџзрї de піатръ, шi алтеле.

Пе пъmînt, deskpim черкзл ка sъ фачеm басіne, партере, піеџе пзбліче, шi ка sъ dipiжъm konstpзкџiеа полігоанелор регзлate. Atзnчї desпърџim чіркоnferinџа întp'atîtea пърџї екзале кîte лаtзpe трезбзе sъ аїбъ полігонзл, шi dзчеm коарda.

În sfîршit deskpinџiеа черкзлзї se întpeбзinџеазъ în tot шinзtзл in челе maї мзлте apte, пentpз къ ел intpъ ка елемент, maї în toate baseле, шi алте тpeбзінчioase d'але kaseї.

(Teoriea n° 14).

26. Ачеastъ пропосіџie не ажзтъ ка sъ împърџim în doъ пърџї екзале зn арк saз зn зnгіз dat. De авеm зn зnгіз, вом deskpi din вірfзл sъз ка чentpз зn арк de черк intpe лаtзpеле лзї, шi вом

ѕпі вірѓѕл кѕ тіжлокѕл коарdеї каре sѕбt-întinde a-чеst арк. Ѕпгюл вірѓѕлѕї ва fi înвеdepat despърціt în doъ пърці ексале. De авеш ѕп арк de îmпър-ціt, вот dѕче коарdа, ші о перпеndікѕларъ pidi-катъ în тіжлокѕл коарdеї ва tpече пріп тіжлокѕл аркѕлѕї.

Dака операціеа se face пе пътînt, ші se чере а se îmпърці ѕп ѕпгю, вот лѕа пе латѕреле лѕї doъ лѕпцімї ексале; вош ѕпі estpeшітъціле прінтр'о коардъ; ші вот лѕа тіжлокѕл ачестеї коарde пе каре îл вот ѕпі кѕ вірѓѕл ѕпгюлѕї прінтр'о лініе ка-ре îл ва despърці în doъ пърці ексале. În кît пеп-tpѕ ѕп арк, пѕтеш ексекѕта tot konstpѕкціеа dѕпе xîptie.

Se веde къ пѕтем tot пріп тіжлокѕл ачеста съ îmпърцім ѕп ѕпгю ші ѕп арк în 4, 8, 16, 32 пърці ексале, îmпърціnd tot în doъ fie-каре din пърціле пречеdente. De ам воі съ îmпърцім în 3, 5 пърці, Цеометріеа елементаръ пѕ пе dъ тіжлоаче, ші tpe-вѕе съ алергъм ла dівѕіt; dap ачесте касѕрі sînt преа рарe.

27. Еатъ ѕп кас ѕпde чере tpeвѕінца съ îmпър-цім ѕп ѕпгю пе пътînt.

Съ sѕпѕпем къ воім съ фачем ѕп васіn, saѕ о піацъ de fiгѕръ октогопъ, каре se întîmплъ преа des; вот deskpi întîю ѕп черк пе tot локѕл че tpe-вѕе съ коппрінzъ fiгѕра, ші вот dѕче doъ diametpe перпеndікѕларе каре съ îmпъртъ чіркопferінца în патpѕ пърці ексале (Fig. 21). Dѕпе ачеаsta вош dѕче коарdа GD; къріiа îї вот лѕа тіжлокѕл m, ші dѕкînd OmB, вот авеа GB, BD, пептрѕ латѕреле октогопѕлѕї. Ле вот пѕпе пе чеа-лалтъ парте а

чірконferinцeĭ, пе каре о вom шtерце, пъstrînd нъмаĭ перimetpъл оktогонълъĭ. Dpeапta Om desпapte ън ънгіъ dpent în 2 пърцĭ екъале; аша dар аркъріле GD, BD, шчл., sînt fie-каре а опta паpte din чірконferinцъ.

(Teoriea n^o 43, 44).

28. Аchest mod întрeвъinцat пе хîрtie ка съ афлъm чеntpъл ънъĭ черк saъ ал ънъĭ арк dat, se поate asemenea ексекъta шi пе пъmînt; не слъжim къ ачеasta în касъл, sпре ексemпль, кînd о піацъ de форmъ чіркъларъ, fiind neisпръвitъ, шi semнеле fiind stpikate, s'ар чере ка съ se kontinъe лъкръріле.

Авem tpeвъinцъ de ачeastъ операціе кînd se чере съ евалъъm sъпраfaцa ънъĭ serment desпърціt de черк. Вош вedea maĭ înколо къ тъсъра ачesteĭ sъпраfeцe чере къноштinцa pazeĭ, лънціme каре se поate афла къъtînd чеntpъл аркълъĭ sermentълъĭ.

(Teoriea n^o 45).

29. Ачeastъ проприetate а tanцenteĭ слъжеште а чірконsкрі полігоaнеле ла черк, fiind къ латъреле полігоанелор чірконsкрise sînt tanцente ла чірконferinцъ.

(Teoriea n^o 52).

30. Ачeastъ teopemъ îmвеdepat dъ mіжлокъл а фаче ън ънгіъ екъал къ ън ънгіъ dat.

1° Пе хîрtie. Fie A (Fig. 23) ънгіъл dat, шi PD dpeапta пе каре se чере съ фачеш ън ънгіъ

еквал întр'вn пвнкt P. Пentpв ачеasta, din пвнкtвл A ка чentpв, шi кв о разъ оаре-каре AG, съ de-sкрim în вnгiвл A вn арк GH; dвпе ачеasta în пвнк-tвл P шi кв ачееашi разъ съ deskpim вn арк пе-definit OK, пе каре лвът $OI = GH$; dвчеm пе PI, шi авеm вnгiвл черst.

În adевър, аркврiле deskpise sînt de черкврi екв-але; аша, din konstpвкцie, ав коарde ексале; аша dap еле sînt ексале; аша dap вnгiврiле ла чentpв че ле копрind sînt ексале.

Ачеastъ проблетъ este преа тsлt întpeвsinцatъ, maî biptos ла фачереа figsрелор ексале, saв pedsse în рапорt кв алtе figsрi пе каре tребве съ ле ко-піеm. Bom bedea maî înколо ексетпле.

2° Пе пътîнt. Este neste пstinцъ, în це-нерал, а трасе аркврi; dap пstem преа лesne съ не апъръm de еле. Fie A (Fig. 24) вnгiвл dat; în-tр'вn пвнкt оаре-каре B вom pidiка о перпеndiкв-ларъ BC, шi лвînd пе liniea datъ, плекînd din пвнк-tвл P, о лвнцime $PG = AB$, вom pidiка аiчi пе GD перпеndiквларъ шi d'о notpiвъ лвi BC. Bom dвче PD, шi вom авеа вnгiвл къвtat. Înвedepata notpi-віре а tpiвnгiврилор dpentвnгe, не dъ квiнtвл пеn-tpв ачеastъ konstpвкцie.

(Teoriea n^{o} 54).

31. Короларвл ал doiлеа ал ачеstвi пвтър не dъ mijлоаче а dвче о перпеndiквларъ ла estpemi-tatea вnеi линii че n'о пstem прелвнцi Ачеastъ не-чеsitate se întîmплъ adesea пе xîртie, ла таpцinea foiлор, шi пе пътînt, лîнгъ вn zid, рapd, шанцврi;

кътре ачеasta este печеsapiŭ ка sъ пътem верifiка ѹnгiюрiле dpeпte фopmate de zidѹpiле гръdiniлор, але кѹрцiлор шi але kaseлор. Аша ачеasta se поate лesne iшплiпi прiп ачеastъ teopeмъ.

1° Копtpѹкцie пе xiptie. Fie лiniea BD (Fig. 25), B пѹпktѹл ачеsteĭ лiniĭ in кape tpeвѹe sъ pidiкъm о перпепdiкѹларъ, пѹпktѹл B aflîndѹ-se ла марџепеа xîptii. Вom пѹпе ѹп пiчiop ал компасѹлѹĭ în B, шi чел-л-алt dѹпе вое în C. Вom înвîрti компасѹл împрежѹрѹл пѹпktѹлѹĭ C пînъ кînd чел-л-алt пiчiop ва întîлпi лiniea dаtъ întp'ѹп пѹпkt оаре-кape D. Вom dѹче прiп пѹпktѹpiле D, C, о лinie nedefinitъ asѹпpa къpiia вom лѹа CP = CD; dѹпе ачеasta вom dѹче BC кape ва fi перпепdiкѹлара черѹtъ.

În adeвъp, челе tpeĭ пѹпktѹpĭ B, D, P sînt d'o potpiвъ depъptate de пѹпktѹл C; аша dap еле sînt але ѹпеĭ чipкoпfepiпце, але къpiia BD, BP sînt doъ коарdе; dap DP este о алtъ коарdъ кape tpeче прiп чепtpѹл C; аша dap ѹпгiюл B кape se peazъмъ пе diametpѹл este ѹп ѹпгiŭ dpeпt.

Пѹtem în локѹл кoпstpѹкцii ачеsteĭa sъ пе sлѹжim кѹ екерѹл.

2° Пе пъмînt. Fie AB (Fig. 26) лiniea dаtъ шi A пѹпktѹл din кape tpeвѹe sъ pidiкъm перпепdiкѹлара. Вom fiksa în пѹпktѹл A, шi întp'ѹп алt пѹпkt арвitpapiŭ B, челе doъ estpemitъцĭ але sfoapeĭ кѹ nod кѹ кape пе-am sлѹжit (18), шi вom întinde ачеastъ sfoapъ. Fie N posiцiea че ва лѹа atѹпчĭ nodѹл; sъ пѹпem ачi ѹп mъiar (Fig. 26). Sъ desfачem sfoapa din пѹпktѹл A шi sъ о întindem în лinie dpeaпtъ, ast-feл în kît sъ atiпгъ mъiapѹл N;

шi fie G nosiцiea че ва лвa atвnчĭ estpemitatea каpe maĭ 'nainte epa în A. Dвkînd AG вom aвea пеpnendiквлapa къвtatъ; чеea че se demonstpeazъ tot кв кiпвл че am întpeбвinцat nentpв konstpвкцiea de npe xîptie, nentpв къ konstpвкцiea пе пъmînt este o imitaцie a челеĭ-лалtе.

De am fi вoit, din npotiвъ, dintp'вn пвнкt G dat anpoane de niediка че aвem, sъ кoбopîm o nepnendiквлapъ, вom fiкsa în G o estpemitate a sfoapeĭ кв nod, шi вom întoapче пînъ кînd чеea-лалtъ estpemitate ва къdea пе лiniea datъ întp'вn пвнкt oapeкаpe P. Bom fiкsa пвнкtвл N, шi вom paбate паptea NG пе ачееaшĭ лinie, пînъ ла întîлnipea sa întp'вn пвнкt A, каpe ва fi пiчiopвл nepnendiквлapeĭ AG.

În sfîpшit, пвtem întpeбвinцa, nentpв ачest îndoit oбieкt, екepвл de sfoapъ despe каpe вom вopбi n^o 119.

31. Bis. Пpoблema sermentвлвĭ капaбiл îшĭ afлъ anлiкaцiea ла pidiкapea плaпвpiлop, кînd se чеpe a detepmina nosiцiea вnвĭ пвнкt de ла каpe пвtem вedea tpeĭ пвнкtвpĭ че sînt însemnate пе плаn, dap de каpe aквm пв пе пвtem anpoпiia. În лinsa ачesteĭ din вpmъ чipкonstanцe, tot d'aвna se пoate, шi este шi maĭ лesne a detepmina nosiцiea вnвĭ пвнкt пвmaĭ npintp'o staцie. Пpoблema вpmъtoape este de feлвл ачesta.

O кopaбie se afлъ în *m* (Fig. 27), întp'o dепъptape oape-каpe de цъpm, a eкsetвtat вn sondaцiв пе каpe вoesк sъ 'л însemneze пе каptъ. Din пвнкtвл *m*, se пot вedea tpeĭ oбieкte *a*, *b*, *c*, каpe fiгвpeazъ пе ачeastъ каptъ. Din пвнкtвл *m* вom тъ-

sѕpa ѕпгіѕріле *amb*, *amc*; dѕпе ачеаstа вom deskpie пе лiniiле *ab*, *bc*, ка коаpde, doъ sermente капавiле але ѕпгіѕрiлop тъsѕpate; intepsекціеа челор doъ чipконfеpinце ва împлini înвedepat чеpepea, ші ва da пѕпкtѕл *m*, пentpѕ къ челе doъ ѕпгіѕpї авînd de вîpf ачest пѕпкt, ші pezemate пе коаpdеле *ab*, *bc*, sînt din konstpѕкціе екѕале кѕ челе doъ ѕпгіѕpї тъsѕpate.

(Teoriea *n*° 59).

DESПPE INSTPЅMENTEЛE ЧЕ SЛЅЖESK ЛА МЪSЅРАРЕА ЅNГIЅРIЛОР.— МЪSЅРА ЅNГIЅРIЛОР ПЕ ХÎРТIE.

32. Instpѕmentѕл кѕ каpe se sлѕжesk ка sъ тъsoape ѕпгіѕpiле пе хîptie, ші каpe se пѕтеште pапоptop este o жѕтъtate de чepк de кopп tpansпapent saѕ de алашъ (Fig 28), авînd de шаse saѕ de doъ-snpe-zeче чentimetpe diametpѕл. Mapцinea каpe este o вandъ латъ dѕпе вое, se пѕтеште лiтвѕл instpѕmentѕлѕї, ші este împъpцitъ în 180 de пъpцї екѕале saѕ гpade, пѕтеpotate din 10° în 10° saѕ din 5° în 5°. Лiniea AB, але кърiї estpemitъцї sînt хotapeле гpadѕаціеї, este ѕп diametpѕ însemnat (0°—180°); se пѕтеште лiniea de кpedinцъ. În тiжлокѕл sъѕ se aflъ o тiкъ кpestъtѕpъ C, каpe apatъ чentpѕл instpѕmentѕлѕї. Кînd ачеаstа este de кopп tpansпapent, se însemneazъ pazeле din 10° în 10°, ші чentpѕл este însemnat пpin o гъѕpiче. Eatъ кѕт se sлѕжesk кѕ ачest instpѕment:

1° De вoim sъ тъsѕpъm ѕп ѕпгіѕ пе хîptie, пѕ-

nem ченtрȣл рапорtорȣлȣĭ în вірfȣл ȣnгюлȣĭ în C, ші лiniea de кредінцъ пе ȣna din латȣреле CP. A doa латȣръ CQ трече neste лімб ші îл tae întр'ȣn пȣнкt I, a кърȣia цifръ, чititъ пе лімб, аратъ пȣмърȣл градeлор ȣnгюлȣĭ.

2° De воim съ faчеш întр'ȣn пȣнкt C, пе о лі-nie datъ CP, ȣn ȣnгю еквал кȣ ȣn ȣnгю dat, de 37° 20′, спре ексемплȣ, че am мъсȣрat пе пъмînt, пȣнеш пе CP, лiniea de кредінцъ, ші însemнъm пе хîрtie аркȣл de 37° 20′ saȣ 37° $\frac{1}{3}$. Fie I пȣнкtȣл detерminat ast-feл; дȣчеm CI, ші вom авea PCI пентрȣ ȣnгюл черȣt.

Ne пȣtem слȣжі tot кȣ рапорtорȣл ка съ faчеm ȣn ȣnгю еквал кȣ ȣn ȣnгю dat пе хîрtie, съ pidiкъm перпендікȣларе кȣ ажȣtорȣл лinii de кредінцъ ші аркȣлȣĭ de 90°, ші înкъ съ дȣчеm ші параллеле; în sfîрші́t instрȣmentȣл пе ажȣtъ ла мȣлtе întребȣінцърĭ прічінȣite de операціiле цеометріче. Рекоманdъm întребȣінцареа челор маĭ марĭ instрȣmente пȣтінчioase.

33. Este ȣn алt міжлок ка съ мъсȣръm ші съ рапортъm ȣnгюріле пе хîрtie. Ачеst міжлок, каре нȣ чере întребȣінцареа нічĭ ȣнȣĭ instрȣment спечіaл, este преферat пентрȣ ексактitate de кît рапорtорȣл. Eatъ каре este ачеst міжлок.

Съ сȣпȣнеш ȣn ȣnгю оаре-каре de 22° 39′, спре ексемплȣ, копрінs între доъ латȣре еквале, ȣнit прін-tр'ȣn арк AB, каре ші ел este de 22° 39′. Коардa ачестȣĭ арк аре оаре-каре лȣнціme, каре ар fi diferitъ пентрȣ орĭ каре алt ȣnгю копрінs între ачелеаш латȣре, ші каре, пентрȣ fie-каре ȣnгю în парte, аре о валоаре оаре-каре фракціонаръ în рапорt кȣ CA.

Dака dap s'ap aſла o taблъ кape sъ dea, пentpв валоріле tвtвлop внгюрілор, din minвt în minвt, лвнціmea коардеї арквлвї deskpis întpe латвреле ачеstвї внгю, кв о разъ еквалъ кв вnimea шъsвреї, deskpiind вn ast-fел de арк întp'вn внгю dat, шi mъsвpindв-ї коардa, вom aſла валоарea ачеstвї внгю. Saв, de se чере sъ fачem пе о лiнie datъ вn внгю еквал кв вn внгю dat, dвnе че вom deskpie кв вnimea, ка разъ, вn арк nехотъpit, вom пвне о коардъ еквалъ кв валоарea аръtatъ în taблъ пentpв внгюл червt, шi аша se ва deteрmina ачеsta (Fig. 29).

O ast-fел de taблъ, a къріï komnosiціе nв пвtem esплiка aiчї, se aſлъ пentpв toate внгюріле, din minвt în шinвt, шi daв коарделе арквpілор лор, nв în валорї абsолвte, чi komпapate кв вnimea de mъsвръ лвatъ dpent разъ. Аша aſлъm, пentpв коарda de 22° 39′, валоарea абstpaktъ 0,3928, кape ва sъ zікъ къ ачеastъ коардъ este $\frac{3928}{10000}$ din раzа кв кape am deskpis арквл. Ка sъ fiksъm ideile, шi sъ înлesnim eksеквціеa ачеstвї mod, noї sſътвiш а лва пentpв разъ лвнціmea вnвї dечimetpв: казвріле în кape ачеаsta ap fi кв nепвtinцъ sînt пpea pape. Лвind ачеastъ валоарe пentpв разъ, коарda de 22° 38′ ва fi de 0,3928 din 0m1, saв 0m,03928; adікъ de 39 шiлimetpe шi вn sfept.

Întpeбвinцареа ачеstвї mod pamплаseazъ кв аванtaцiв întpeбвinцареа paпoptopвлвї, пе кape nв пвtem чiti fpakціiле de грade. Вom пвне, ла sfîpшitвл къpцiї, o taблъ de коардe пentpв арквpіле, din 10 în 10 minвte, кape este destвлъ пentpв пpatiкa komвnъ. De вoim sъ авem валоарea коардеї внвї

арк intермediар, ìл аfлъm апрокsimatiв прin о пропорціе, ìn кiпsл ѕрmътор:

Sъ ѕsпsпет къ se чере коарda de 22° 39′. Табла dъ пеntрs коарda аркsлsї de 22° 30′ ... 0,3902, шi пеntрs 22° 40′ ... 0,3930. Diferinца ìntре ачесte doъ валорї este 0,0028. Чеса че тревѕе sъ адоъгъm ла коарda de 22° 30′, ка sъ аfлъm коарda аркsлsї de 22° 39′, каре se deosiвеште de dînssл кs 9′, se аре кътре чеса че am adъогаt ла коарda аркsлsї de 22° 40′, каре se deosiвеште de dînssл кs 10′, прекsm 9 se аре кътре 10; de ѕnde

$$10 : 9 :: 0{,}0028 : x = 25{,}2;$$

аша dар вom авеа пеntрs коарda de 22° 39′, 0,3902 + 0,0025 = 0,3927, валоаре каре пs se deosiвеште de чеа аfлатъ maї sss, прintр'ѕn miжлок maї dірект, de кît кs maї пѕцin de кît 0,0001, каре dъ о а sѕтълеа din milimetрs пеntрs о разъ de ѕn dечimетрs, adiкъ кs mѕлt maї пѕцin de кît гросimea вîрfѕлѕї компаsѕлѕї.

De воim sъ fачеm ѕn ѕпгiѕ maї маре de кît de 90°, вom fаче пе партеа опѕsъ ѕпгiѕл каре este sѕплimentѕл ачеstѕiа, шi каре tot d'аѕпа este maї miк de 90°. Прелѕпцiреа ѕпеia din латѕреле sале dinколо de вîрfѕл sъѕ ва da ѕпгiѕл teшit че воim sъ fачеm.

33. Bis. Вош веdеа maї înколо къ sînt преа пѕцine полiгоане регѕлате че se пот însкрi d'a dрептѕл in черк: таблa de коарde не ажѕtъ ка sъ însкрim пе тоате челе-лалте. Чеаръ-se, sпре ексемплѕ, епtагопѕл, saѕ полiгопѕл de 7 латѕре: а шаптеа din 360° fiind 51° 26′, а кърѕiа коарdъ este, dѕпе таблъ, 0,8679, вom лѕа fракцiеа ачеаsta а па-

zeĭ, пе каре о вот пѫне пе чіркопſеріnцъ; ачеаsta ва ſі латѫра еntагоnѫлѫĭ. Dака раza esle de ѫn' de-чіmetрѫ, ачеаstъ коардъ este 86 mілімеtре шi треĭ sſертѫрĭ.

МЪSѪРА ѪNГІѪРІЛОР ПЕ ПЪMÎNT.

Desпre Графоmетрѫ.

34. Dака ѫn оbserвator, ашеzat întр'ѫn кіп оаре-каре пе пъmînt, веde doъ обіекte T S, se фаче ѫn ѫпгіѫ формat de doъ раze візѫале dірігате кътре челе doъ обіекте, шi порnite din окіѫл обсерваторѫлѫĭ, каре este вірфѫл ѫпгіѫлѫĭ.

Instрѫmentѫл кѫ каре не слѫжim ка съ mъsѫръm ачеste ѫпгіѫрĭ se nѫmеште графоmетрѫ. Ачеsta este о жѫmъtate de черк de аламъ, авînd, ка шi рапортoрѫл, лімбѫл sъѫ, лініеа sa de кредіnцъ шi градѫацiеа sa în 180°. Diameтрѫл варіеазъ de ла 15 пînъ ла 30 чеntimeтре; mіжлокѫл C ал лінii de кредіnцъ AB se афлъ în чеntрѫл ѫnѫĭ пiвот, împрежѫрѫл кърѫіа se îmвіртеште о бandъ saѫ diametрѫ mобіл pq, че se zічe алідадъ. Instрѫmentѫл este пѫртаt пе ѫn цепѫкіѫ, прiп ажѫторѫл кърѫіа ĭĭ пѫtem da toate позiціiле пѫtinчioase.

Ла amîndoъ estpemiтъціле бandeĭ AB, каре înфъціmeaзъ diameтрѫл, se афлъ рidiкate пернеndiкѫлар doъ пinѫле saѫ dpeпtѫnгe de ачеeашĭ лъціme шi de 4 saѫ 5 чеntimeтре de înълціme, каре sînt пътрѫnse de ніште deskiderĭ saѫ фереstре, прiп mіжлокѫл кърора sînt întinse ſіре каре слѫжеsk а ſікsа

razele vizuale че îndreптъm asупра oбieкtelор oбservate. (Fig. 30 шi 31).

Estremitъцiле alidadeї пoartъ шi еле пinуле. Пе aчeastъ бuкatъ, каре пoate луа toate posiцiiле пutinчioase împrejurул pivotулуї, este trasъ o liniе каре treче prin чentrул aчestuia, шi каре пoate iaче, ку liniea de кredinцъ, toate валoriле унгiулаre putinчioase. Estremitъцiле sале sînt însemnate (0° — 0°), шi еле arъt пе limб gradeле унгiулуї oбservat.

Instrumentул se unеште printr'un цenуkiу, къ un пiчiop компus de treї ramure aвînd în къпъtie кîte un fер asкuцit, шi каре sînt moбiле împrejurул oriцinеї лор комunе, ast-feл în кît putem пune instrumentул într'o posiцiie шi ла o înълцime кuвiinчioasъ. Eatъ акum кum пе putem sлужi ку dînsул ка sъ mъsуръm унгiuriле.

Fie un oбservator în posiцiea че grafometrул oкupъ figura, шi supunem къ ар treбui sъ mъsуръm унгiул че fак челе doъ raze vizuale îndreptate кътre oбieкtеле T, S, луate departe пeste кîmп. Пunem instrumentул пе пiчiорул sъу, ла înълцiме кuвiinчioasъ; шi, din цenуkiул sъу, aшazъm orizontaл планул limбулуї. O пiвелъ ку бъшiкuцъ de aер (90) пе ва înкredinцa despre aчeastъ posiцie. Вom învîrti instrumentул împrejurул sъу, ast-feл în кît sъ aduчem pinулеле A, B шi liniea de кredinцъ în direкцiea CT a uneїa din лaturеле унгiулуї, în кît oкiул fiind пus în A, fireле pinулелор sъ se паръ къ se konfondъ asупра oбieкtулуї T. Вom fiкsа grafometrул într'aчeastъ posiцie, dупе aчeasta вom dirija alidada tot într'aчest кip кътre oбieкtул S. Liniea чentraлъ a alidadeї

ва аръtа atнчĭ пе лimБ валоареа аркълĭ BQ, шi прin хртаре а хнгюлĭ SCT.

Noĭ sзпзнem аiчĭ къ хнгюл de тъsзрat este întр'хп план орizontал, каре maĭ niчĭ о datъ нх se întîmплъ. Însъ, în џенерал, нз тъsзрът хнгюл а doъ лiniĭ, чi хнгюл format de doъ планзрĭ вертiкале, копрinzînd разеле вiзхале шi акселе обiектелор ла каре вiзъm. Însъ, din прiчina лзнџimeĭ пiнзлелор, обiектеле каре sînt maĭ sзs saŭ maĭ жоs, de кît операtорзл, лаsъ sъ se зъреаskъ чева пзнкtзрĭ, чееа че пе ажзнџе. Хнгюл че чitiш пе графоmetрзл este екзал кз чел че fак хрmеле (Теор. 130) планзрiлор вертiкале пе планзл орizontал imаџiнарiŭ, шi обiектеле вiзate se sокоtesk проектаte пе ачеst план. Пзtem defini проекцiеа хнзĭ обiект пе хн план орizontал, хмбра ачеstзĭ обiект пе план, sоареле afлîndз-se tокmaĭ d'asзпра обiектзлзĭ.

Ла графоmetреле destinate пentрз операцiĭ че-ва maĭ марĭ, пiнзлеле sînt рamплаsate de лзнete moбiле, din каре хнзл se afлъ пзs пе алidadъ, чел-л-алt sзбt diametрзл fiкs. Еле se пот miшка ast-fел în кît аксзл лор sъ remîe tot d'asна întр'хн план вертiкал dзs прin чентрзл instрзmentзлзĭ. Ачеste океане пе ажзtъ ка sъ bedem кзрat обiектеле, шi de destзл de denapte; еле se bъd întoapse, каре нз пе sзпъръ nimiк; шi раза вiзхалъ este determinatъ de лiniеа каре хнеште чентрзл окюларзлзĭ, каре este о преа miкъ deskidере, кз interсекцiеа а doъ fiре преа sзнцiрĭ, каре se înкрзчiшеz în хнгюрĭ dрепте în океан, каре лiнiе, че este аксзл океанзлзĭ, трече прin чентрзл instрзmentзлзĭ. Мiшкареа че пот прiimi океанеле în планзрĭ вертiкале пе а-

жstъ a вedea oвiekte че se afлъ mълt maĭ sъs saŭ maĭ жos de kit nівела oвsepвatopълsĭ. Întp'aчeastъ întîmплapе, планsл sнгisлsĭ de mъsspat este înkлinat лa opizont; dap fiind къ skoпsл nostps mъssрînd sнгisрiле пе пъmînt este maĭ tot d'asna a doвîndi sнгisрiле aчestea p e d s s e л a o p i z o n t, aчest skoп se împліnеште npin disnosiцiea океанелор, kaре, în mішкapea лор, лasъ aлidada opizontaлъ, прекsm ші лimвsл. Океанеле npiimitoape de aчeastъ mішкаpе se nsmesk O k e a n e a п л e k ъ t o a p e.

35. Sne-opĭ se întîmплъ ka sъ mъsspъm fъpъ a pedsче лa opizont, sнгisл fopmat de doъ paze вizsaле dipiжate кътpe doъ oвiekte date în snaчis. Întp'aчeastъ întîmплapе, îndpenтъm лsнeteле паpaлеле кs планsл лimвsлsĭ, ші mішкъm instpsmentsл din цensкisл съŭ, ast-feл în kit sъ adsчem лsнeteле în вedepea nsnktspiлop кътate, atsнчĭ лimвsл este în планsл sнгisлsĭ de mъsspat.

36. Daka sнгisрiле de mъsspat sînt întp'sn план вeptikaл, чеea че se întîmплъ npea des, snpe eksemплs, лa mъsspъtoapea înълцimiлop, пsнem вeptikaл планsл instpsmentsлsĭ npin ажstopsл snsĭ fip кs плsmв npea ssвцipe kape tpeвse sъ koinчidъ кs лiniea de 90°, saŭ maĭ вine кs лiniea kpedinцeĭ Fig. 32). În kassл d'întîis, лiniea kpedinцeĭ *ad* se aflъ opizontaлъ, ші aлidada se mішкъ întp'sn план вeptikaл; fie *pq* nosiцiea în kape ea tpeвse sъ se oпpeaskъ, sнгisл de înълцime *qcd* se вa чiti пе apksл *ap*.

37. Împъpцipea лimвsлsĭ este de жsmъtъцĭ de гpade nsmaĭ; ші se simte tpeвsinцa de o mъsspъ mълt maĭ npeчisъ. Oпepaцiĭ foapte opdinape чеp евaлsaцiea anpoane de sn minst; ші oвsepвaцiiле

astponomiче вор fi пpea пpoaste de вор авеа гpe-шалъ kite-ва sekвnde. Кв toate aчestea квm sъ пpeцвim în лвпцimea вnei жвmътъцi de гpad, каре океnъ вn milimetpв апpoane, mъpimea вnвi шinвt, каре кopesпвnde кв гpositmea вnвi fip de пър opdi-nap? Ші de boim sъ авеm, пpeквm se întîmплъ вne-opi, o пpeчisie de o sekвndъ, atвnчi tpeбве sъ пpeцвim кв окiвл a шaï-zeче-лea napte din гpositmea вnвi fip de пър. Aчeste pesвлtate de пeкpe-zвt sînt кв toate aчestea pealisate пpin modвpiле вpmъtoape.

Estpemitatea алidadeĭ, каре este de oape-каре лъцime (Fig. 33), este potвnжitъ în аpк, ші тъiatъ în dвnгъ, ші se аштеpne кв eksaktitate пе лimб. Sъ sвпвnem къ челе doъ лiniĭ zepo a лimбвлвĭ ші a алidadeĭ koinчid eksakt. Aptistвл ia пе лimб вn аpк de 29 жвmъtъцĭ de гpade, ші аpквл кopesпвnzъtop лвat пе алidadъ este împъpцit în 30 de пъpцĭ екв-але, лвкpв пpea лesne. Aчest аpк se пвmeште a-tвnчĭ вn вepnieр. Împъpцipiле dap de ла вepnieр sînt пвцin maĭ miчĭ de kit împъpцipiле лimбвлвĭ, ші fiind къ 29 але лimбвлвĭ пpeцвesk 30 d'але вepnie-pвлвĭ, пвmaĭ вna d'але aчestвia пpeцвeште $\frac{29}{30}$ din-tp'o жвmъtate de гpad; аша dap ea este maĭ mikъ de kit $\frac{1}{30}$ dintp'o жвmъtate de гpad saŭ de kit вn minвt; аша dap челе doъ лiniĭ zepo koinчidînd, чea d'întîiŭ împъpцipe a вepnieрвлвĭ întîpzieazъ кв 1′ пе чea d'întîiŭ a лimбвлвĭ; чea d'aл doiлea, кв 2′; a tpeia, кв 3′, ші аша maĭ înколо, пentpв къ tpeбве sъ adъoгъm 1′ de întîpziepe ла fie-каре întîpziepe

пречеdentъ; în sfършit, а тreї-zечілеа îmпърціре а верпіерълъї întîрzieazъ кв 30′ saв о жвмътate de град ла а тreї-zечілеа а літбълъї, чееа че връмеазъ d'а dреntвл din konstрвкціе.

Dвпе toate ачestea, съ sвпвпem къ лiniea zеро а алidadeї kade în I întрe 33° ші 33°$\frac{1}{2}$. Ка съ пре-цвт шiквл арк HI кв каре петрече пе 33°, вош къвta каре sînt пвпкtвріле de împърціре але верпіервлві ші але лiмбвлві каре kореspвпd eksakt. Съ sвпвпem, прекът se bede în figвръ, къ ачеаsta se face ла а чiпчілеа împърціре а верпіервлві. Îпчепiпd de ла ачеst пвпкt, fie-каре împърціре а верпіервлві înaintînd кв 1′ пе лiмб, мергînd de ла dреапta спре stînга figвреї, лiniea zеро înainteazъ dар кв 5′ пе împърціреа лiмбвлві пе каре поï ам sвпвs-о de 33°. Прецвл арквлві HI este dар de 5′, ші впгівл observat ва fi de 33°, 5′. În цепeрал, требве ла жвмътъціле de grade observate, съ maï adъогът atîtea minвte kîte пвпкtврі de împърціре sînt пiпъ ла ачела каре kореspвпde eksakt кв о împърціре а лiмбвлві. Ка съ înлеsпim ачеst чitit, верпіервл аре semne din 10′ în 10′.

De ачі se bede къ пеntрв ка грешала фъквтъ ла чititвл впгівлві съ fie de вп minвt, требвіа съ fi лват, în лок de челе doъ împърціri че koinчid, împърчіріле вечine, каре maï къ пв se întîmплъ, maï вîрtos dака пе sлвжіm кв о лвпъ. Se поate însъ întîmпла ка съ пв авеm пікъірі koinчidinцъ; atвпчі вnа din împърцiріле верпіервлві kade întреагъ întр'о împърціре d'але лiмбвлві, ші пвtem лва dвпе вое ор-каре dintр'ачеste doъ пвмере, fie ла dреапta, fie

ла stinra; пentрȣ кѣ, în ор-каре dintр'ачеste касȣрї, грешала ва fi апроапе de о жȣmѣtȣte de minȣt.

38. Îmпѣрцind în 60 de пѣрцї екȣале ȣn арк de 59 жȣmѣtѣцї de граde, пȣtem чiti жȣmѣtѣцiле de minȣte пе верniер, dар афарѣ de diверseле inконвеniенцȣрї але ачеstȣї mod, este îmпеdеpat кѣ нȣ вom пȣtea înainta аша пinѣ ла секȣnde, прекȣm s'ар чере. Еatѣ щodȣл че аȣ imaцinat пentрȣ чititȣл ачеstора.

Fie SCT ȣnгюл mѣsȣрat че пȣtem чiti пе instрȣment кȣ maї пȣцin de кit 1′ апроапе. În лок de а чiti пе ачеsta, fiксѣm алidada în пosiцiea че еа окȣпѣ, шi întoарчеm черкȣл îmпрежȣрȣл чеntрȣлȣї сѣȣ, ast-fел în кit сѣ adȣчеm алidada fiксѣ în diрекцiea латȣреї CT а ȣнгюлȣї mѣsȣрat. Лiniea dар de кредinцѣ а înапоiat кȣ о кitime екȣалѣ кȣ ачеst ȣнгю; шi de вom fiкsa черкȣл întр'ачеаstѣ пosiцie, вom mішка алidada, шi о вom dȣче din ноȣ пе а doa латȣрѣ CS а ачелȣiашї ȣнгю, еа ва кореспȣnde кȣ о градацie BG înвеdерat îndoitѣ de прецȣл ȣнгюлȣї SCT. Нȣ чitim нiчї ачеаstѣ градацie d'ал doiлеа; чi, прintр'о ноȣѣ револȣцie а черкȣлȣї împрежȣрȣл чеntрȣлȣї сѣȣ, вom dȣче iарѣшї алidada аsȣпра лȣї CT, dȣпе ачеаsta о реаdȣчеm аsȣпра лȣї CS, шi atȣнчї еа аратѣ ȣн прец BH, întреit de кit ал ȣнгюлȣї SCT (Fig. 30). Сѣ сȣпȣнеm кѣ am репetat ачеаstѣ mішкаре de 60 de орї, алidada ва пetрече de maї mȣлte орї чirконferinца, сѣ о fiксѣm în пosiцiea sa din ȣрmѣ. De вom чiti прецȣл ȣнгюрiлор че еа аратѣ пе лimб, цiind în soкotеалѣ чirконferinцеле че а пetрекȣt, ел ва fi de 60 de орї прецȣл ȣнгюлȣї обсерват, шi вom авеа пе чел аdе-

върat, împърцind prin 60 прецвл total ал внгювлвї петрекst; пstem însъ чiti ачеst прец кв 1′ maї пв-цin апроапе; аша dap, fiind къ грешала чititвлвї este împърцitъ prin 60, еа ва fi aiчї кв maї пвцin de кît $\frac{1}{60}$ din minst, saв maї шiкъ de кît o sekвndъ. Sъ sвпвnem, sпре екsemплв, къ алidada a петрекst de 5 орї чirконferinца шi maї аратъ înкъ 87° 13′; вom авеа пentpв аркsл totaл петрекst 360°+5+87° 13′= 1887° 13′, а кървia а шasea napte este de 31° 27′ 31″. De am fi чitit 87° 14′, прец maї mape кв 1′, максiшвm грешелiї чititвлвї, am afла пentpв a 60-леа parte а аркsлвї петрекst 31° 27′ 14″, каре se deosiбeште de пречеdentвл кв 1″. Ачеsta este dap хotapвл грешълеї че пвtem faче în întpeбвinца реа ачеstвї mijлок. Dap tpeбвinца de о ast-feл de пречisie este преа ракъ în операцiiле цеоmetpiче пе пъmînt.

Трафоmetpвл че se întpeбвinцеазъ ла ачеst feл de операцiї, este вn черк întpeг каре ia пвмеле de черк рапеtitop: se веde пentpв че este пече-sapiв ка sъ fie întpeг. Тречеm кв веdереа mвлte amъpвnte каре tpeбвеsк stвdiate кеар пе instpвment, прекsm шврвпвpiле de пресie шi de рапел, ni-веделе, шчл.; кв atît maї mвлt къ практiка este пе-чеsapie пentpв înцелецереа комплектъ а кiпвлвї de а mъsвра внгювpiле.

ПЕNТРВ БВSОЛЪ.

39. Se sлвжеsк înкъ, ка sъ шъsoape внгювpiле, пе пъmînt, кînd нв se чере о пречisie maї mape

de кit ȣn sfept de грad, кȣ instpȣmentȣл кȣnoskȣt sȣбt nȣmeлe de бȣsoлъ. Ea konstъ dintp'o кȣtie пъtpatъ (Fig. 34) în каpe se aflъ o чipкonfepinцъ гpadȣatъ, în чentpȣл къpiia este aninat пe ȣn пiвot foapte askȣцit ȣn aк magnetat, пpea mişкъtop. Aчest aк, каpe ape пpoпpietatea pemaркабiлъ, nȣ de a se întoapчe spe nopd, пpeкȣm o кped de oбщte, чi de a лȣa o posiцie statopnikъ intp'aчeлaşi лoк întp'o пpea mȣлtъ вpeme, şi de a pevenі iapъşi aкoлo пpintp'ȣn şip de osчiлaцii, кînd se depъpteazъ, se poate dap sokoti ка o dipeкцie fiksъ.

Лatȣpa кȣtieі пoaptъ ȣn okean, saȣ sistemъ de пinȣлe, nȣmitъ вiziepa, aл къpii aks se mişкъ întp'ȣn плan вeptiкaл пapaлeл кȣ лiniea însemnatъ (0 — 180°) пe instpȣment. Бȣsoлa se aşeazъ пe ȣn пiчiop ка гpafometpȣл, şi este пpiimitoape de o mişкape de potaцie opizontaлъ. Sъ îndpentъm вiziepa пe ȣna din лatȣpeлe ȣнгiȣлȣі de mъsȣpat, şi sъ însemnъm лa че гpadaцie kopesпȣnde вipfȣл чeл aлбastpȣ aл aкȣлȣі. Dȣпe aчeasta вom întoapчe кȣtiea ка sъ adȣчem вiziepa пe a doa лatȣpъ a ȣнгiȣлȣі. Aкȣл каpe este fiks вa kopesпȣnde кȣ aлtъ гpadaцie; daкa eл apъta întîiȣ 27° $\frac{3}{4}$, şi aкȣm apatъ 49° $\frac{1}{2}$, difepinцa 21° $\frac{3}{4}$, este кîtimea кȣ кît s'a intops кȣtiea, adiкъ пpeцȣл ȣнгiȣлȣі oбsepвat. Neнȣtinцa de a adonta ȣn вepniep лa бȣsoлъ, este пpiчina de nȣ пȣtem, кȣ aчest mijлoк, sъ mъsȣpъm ȣнгiȣpiлe кȣ пpeчisie; пentpȣ aчeasta se sлȣjesк кȣ бȣsoлa лa pidiкapea плanȣpiлop, ка sъ пpeцȣiaskъ nȣmai aчeлe ȣнгiȣpi aлe къpop лatȣpe sînt skȣpte, ast-feл în кît гpeşaлa fъкȣtъ asȣпpa ȣнгiȣлiлop nȣ este пpea simцiбiлъ asȣпpa лatȣpeлop; пe sлȣjim кȣ бȣsoлa ка sъ

pidiкът skimбъріле de dipeкціе каре нв tребве аръtate кв mape eksaktitate, прекsm kotitвріле гірлелор, але dpвmвpілор шчл.

40. Бвsола mapinъ saв kompasвл de mape, нв se deosiбеште de пречеdenta, de kit нвmaї înтр'ачеasta къ în лок de a fi пврtatъ de вн півоt, акsл marнetik este alipnat de вн fip пе о шапъ de xîptie, ast-feл în kit sъ fie opizonтaлъ, шi sъ se îmпъртъшеаskъ нвмai кв mішкареа opizonталь а коръбіеї. Еа este înкisъ întp'вн feл de колівіе че se нвmеште абitaклв. De вom обsерва аръtареа акsлвї în шinвtвл în каре іа о dipeкціе oаре-каре корабіеа, konsвлtînd din kînd în kînd бвsола, пвtem шti de'шї а лъsat корабіеа dpвmвл примітів, шi, de'л ва fi лъsat, s'о pедвчem ла лініеа че tребве sъ вpmeze. Пвtem dap, кв ачеst мijлок, кnos-kînd dpвmвл че ціне корабіеа акsm, sъ кnоаштem пе xapтъ, fъpъ ажвtорвл stелелор, вnde не aflъm пе mape, шi sъ îndpeпtъm корабіеа кътре пвнктвл boit ал вnei mapціnї вnde tребве sъ цъpmвpim. Ачеаstъ пропріеtate а бвsолеї о fаче къльsзъ а наві-гаторілор, afаpъ de ачееа че кв грешалъ ії atpi-бвesk къ аратъ пвнктвріле kapdinaле. Ачеаstъ din вpmъ, каре este лвatъ întp'вн кіп абsолвt, este pesвtatъ în fie-каре minвt шi maї în toate пвнктвріле despre faца пъmîntвлвї, кв toate ачеstea, не dъ, кв ажвторвл оаре-кърор табле, вн mijлок de кnоштінцъ; însъ teopiea este преа komплікатъ шi преа streinъ de обiектвл nostpв ка sъ о esпвнem aiчї.

Нвmesk deклinaціе а акsлвї marnetat kitimea внгівлаpъ кв kit ачеst ак se deпъpteazъ de dipeк-ціеа нopdвлвї-Sвd. Ачеаstъ deклinaціе, каре

варіеazъ dȣпе лок, este акȣm пentрȣ Парis de 22°
ші кіte-ва minȣte, întpe nopd mi ȣest.

SEKSTANT DE PEFЛЕКЦІЕ.

41. Întребȣінцареа графошеtpȣлȣї ші а ſȣtȣлop instpȣmentелор кȣ пічіоаре ажȣнџе непраtікабілъ пе mape, ȣnde mішкареа коръбii skimбъ în tot шіnȣtȣл pazеле vizȣале ші лініiле opizontaле. Dap тъsȣpa ȣnгюларъ ажȣнџе преа лesne, кȣ ажȣtopȣл instpȣmentелор de pefлекціе. Eatъ прінчіпȣл пе каре еле sînt întemeiate.

Fie о оглindъ MN (Fig. 35) asȣпра къріia о pazъ întîmплъtoape RI se pesfpînџе ȣpmînd dipeкціea IR′; ȣnгюріле че fак кȣ оглinda pazеле întîmплъtoape ші pesfpîngъtoape fiind еквале, dȣпе кȣm штim. De вom înвîpti оглinda împрежȣpȣл пȣnktȣлȣї I, dîndȣ-ї пosiціea M′N′, paza întîmплъtoape RI, se ва pesfpînџе întp’о алtъ dipeкціе IS; de ȣnde, zік къ ȣnгюл R′IS че копpind челе doъ paze sȣкчesiв pesfpînte, este îndoit de кît ȣnгюл MIM′ че пе-а întops оглinda. În adeвър, sъ пȣтім φ ȣnгюл de întîmплare RIM, каре este еквал кȣ ȣnгюл de pefлекціе R′IN; sъ пȣтім ω mішкареа ȣnгюларъ а оглindeї. Авеш, прin прецȣл ȣnгюлȣї копpins de челе doъ paze în чеа d’întîiȣ пosiціе а оглindeї $RIR' = 180° - 2\varphi$. În а doa пosiціе, акȣm $RIS = 180° - 2(\varphi - \omega) = 180° - 2\varphi + 2\omega$. Skъzînd întîia еквалitate din а doa, afлъm $RIS - RIR'$ saȣ $R'IS = 2\omega$. Чеea че tребȣia sъ demonstpъm.

42. Fie акꙋm (Fig. 36) doъ пapaлeлe *pq*, VK, шi H ꙋn пꙋnkt лꙋminos aшezat лa пemъpцinit, de ꙋnde вa вeni пe чeлe doъ oглinzĭ paza H*m*, HM кa-pe вop fi шi eлe пapaлeлe. Este лesne de demon-stpat къ paze пapaлeлe, къzind пe oглinzĭ пapaлeлe, se вop ръsfpinцe пapaлeл; ast-feл in кit daкa ꙋn oкiꙋ пꙋs in D вedea пꙋnktꙋл H in oглinda *mn* пpin paza dpeaптъ HD, paza пapaлeлъ HM ръsfpinгindꙋ-se din M in *m*, se вa pesfpinцe din пoꙋ ꙋpmind *m*D, пapaлeл лꙋĭ HM, шi пpin ꙋpшape in пpeлꙋнцipea лꙋĭ H*m*. Aшa dap oкiꙋл D вa пpiimi in *m* imaцina пꙋnktꙋлꙋĭ H пe кape iл вa вedea шi d'a dpeптꙋл.

Sъ intoapчem oглinda *v*K impeжꙋpꙋл пꙋnktꙋлꙋĭ M; pazeлe лꙋminoase чe вop къdea sꙋкчesiв in M, dꙋпe aчeasta in *m*, aпoĭ вop лꙋa dpꙋmꙋл *m*D, вop вeni din пꙋnktꙋpĭ difepite de пꙋnktꙋл H, шi кape вop вapia intp'ꙋn кiп кonцinꙋt, dꙋпe miшкapea oглinzeĭ. Sъ oпpim пe aчeasta, кind imaцina peкꙋnosaвiлъ a ꙋnꙋĭ пꙋnkt S, пpeкꙋm o stea, sпpe eкsemплꙋ, se вa zꙋгpъвi intp'a doa oглindъ *m*, шi se вa konfꙋnda пentpꙋ oкiꙋ кꙋ пꙋnktꙋл H въzꙋt d'a dpeптꙋл пpin a-чeastъ a doa oглindъ. In кasꙋл aчesta, paza ръ-sfpintъ вa fi in dipeкцieа *m*D; aшa dap, fiind къ a doa oглindъ este nemiшкъtoape, aчeastъ pazъ вa fi ръsfpinцepea лꙋĭ *m*M; aшa dap, dꙋпe teopema de maĭ sꙋs, ꙋнгiꙋл HMS вa fi indoit de кit ꙋнгiꙋл *g*MK къ-pꙋia a intops oглinda, *v*K. Aшa dap, in aчeastъ miшкape a oглindeĭ, пꙋtem sꙋпꙋne къ MH шi MS вop fi pefлeкцiiлe sꙋкчesiвe aлe лꙋĭ *m*M, saꙋ къ paza MH вa fi tpeкꙋt in S, пpeкꙋm se intimплъ лa pa-zeлe вizꙋaлe кape se indpeпteazъ seкчesiв dꙋпe чeлe doъ лatꙋpe aлe ꙋнгiꙋлꙋĭ. Aшa dap, in кasꙋл aктꙋaл,

ѹнгюл копріns întpe челе doъ пѹнктѹрї H, T аѹ de тъѹръ îndoitѹл ѹнгюлѹї deskpis пріп mішкаpea огліnziї.

43. Aчеste пріnчіпе se аплікъ imediat ла konstpѹкціеа instpѹmenтелор peflektoape. Fie (Fig. 37) ѹn лimб asemenea кѹ ачела ал графometpѹлѹї, însъ пѹmaї de вре о шаї-zeчї de градe, ші destinat а se ціне în mînъ de mînѹкерѹл M. Ел поартъ о алidadъ AD, пе каре este fiksatъ перпендікѹлар о огліnжоаръ каре se înвîpteште кѹ ел împpeжѹpѹл чentpѹлѹї A. În I se aflъ о алтъ оглindъ asemenea перпендікѹларъ пе планѹл лimбѹлѹї; însъ жѹmъtatea inферіоаръ а stiклеї este пѹmaї еа kositopitъ, ші în фаца лinii de despърціpe este fiksat în O ѹn окепаш ла каре se пѹне окюл обсерваторѹлѹї. Позіціеа оглinzi I este ast-фел în кît планѹл sъѹ sъ fie паралел кѹ ал оглinziї A, кînd алidada este în AC пе zepo ал лimбѹлѹї. Boim акѹm sъ mъsѹpъm înълціmea ѹнеї stele asѹпpa opizontѹлѹї? Пѹнem instpѹmentѹл întp'o sitѹaціе вертікалъ, ші візъm mapціnea opizontѹлѹї пѹind окюл în O ast-фел în кît sъ ведem ачеastъ mapціnе în оглinda I, întp'o лinie каре tae перпендікѹлар mapціnea kositopipiї. De вom пѹне алidada пе zepo, imaціna ачеsteї mapціnї de opizont se ва zѹгръві în I în партеа kositopitъ ші пе прелѹнціpea лinii пречеdente. Mішкъm алidada пînъ кînd mapціnea stелеї ва koinчida, în оглinda I, кѹ imaціna opizontѹлѹї. Depъptapea оглinziї A, d'o потрівъ кѹ mішкареа алidadeї, este жѹmъtatea ѹнгюлѹї копріns întpe челе doъ обіекte візate, adікъ înълціmea opizontалъ а stелеї. N'ap maї tpeбѹї de кît sъ îndoim dѹпе че о вom чіti, аръtapea

алidadeĭ; dap ачеastъ грiжъ este de пpisos, пeňtpв къ fie-кape жвmъtate de грad se sокоteшte ка вn грad. Вn instpвment dap ал кървia лimв este нв-шаĭ de 60°, поate mъсвра вnгiврĭ de 120°. Ast-fел este sекstantвл de pefлекцiе, întpeввinцat пе mape.

Мiшкарea коръвii нв ватъmъ siшцiвiл întpeввin-цареа sекstantвлвĭ, пentpв къ koinчidinцa iшaцine-лоp este o fantъ d'o клiпъ пе кape nosiцiea алida-deĭ о пъstpeazъ, кв toate miшкъpiле че вpmeazъ клiпа оввepвaцieĭ. Ачеst instpвment komod, înкъ de обшtе întpeввinцat, пepde în toate zileле din npi-чinа конкврenцiĭ чepквлвĭ pefлекtop ал лвĭ Бopda, instpвment fondat пе ачелеашĭ npiнчiпe, dap de o konstpвкцie maĭ desъвîpiшitъ, шi ал кървia npiнчiпал авantaцiв konstъ în penetiцiea вnгiврiлоp. Noĭ maĭ adъогъш къ sекstantвл se întpeввinцeazъ кв аван-taцiв ла mъсвpаpea вnгiврiлоp пе пъmînt; dap tpe-ввe ка овiекtеле съ fie îndestвл de denъptate, nen-tpв ка pazеле че вin de ла вn ачелашĭ пвнкt пе че-ле doъ оглinzĭ съ se поatъ sокоti ка паралеле.

ОПЕРАЦIIЛЕ ЧЕ ПВТЕМ FАЧЕ ПЕ ПЪМÎNТ КВ ГРАFОМЕТРВЛ.

44. Графошеtpвл este npea tpeввinчios ка съ des-легъm пе пъшînt kîte-ва пpовлеme, ла кape ноĭ am întpeввinцat sfoapa; dap кape нв se пot съвîp-шi, кв ачеst miжлок, ла mapĭ întindepĭ.

Sъ не пропꙋнем d'о кат datъ а dꙋче прінtр'ꙋн пꙋнкt dat о перпеndікꙋларъ ла о dреаntъ datъ.

Dака пꙋнкtꙋл este dat пе dреаntъ, пꙋнем întр'ачеst пꙋнкt instрꙋmentꙋл, а кърꙋіа лinie de кредinцъ о îndрепtъm пе лiniea datъ. Dꙋпе ачеаsta, пꙋind алidada пе 90°, вom авеа dірекціеа перпеndiкꙋларeĭ, шi вош пꙋне depapte ꙋнꙋл saꙋ maĭ mꙋлte mъцe în dірекціеа разеĭ візꙋале. Dака пꙋнкtꙋл P esfe dat afapъ din dреаntъ (Fig. 38), вom пꙋне d'о каш datъ ꙋн mъiaг întр'ачеst пꙋнкt; dꙋпе ачеаsta, пꙋind графометрꙋл întр'ꙋн пꙋнкt арбitрapiꙋ D ал лinii date, вom шъsꙋра ꙋнгiꙋл PDA. Instрꙋmentꙋл dꙋпе ачеаsta se ва пꙋне în P; лiniea de кредinцъ dipiжatъ пе PD, шi алidada dꙋsъ ла о градаціе каpe sъ fie diфepinца ꙋнгiꙋлꙋĭ PDA кꙋ 90°. Пꙋнem ꙋн mъiaг întр'ꙋн пꙋнкt Q ал dipeкціi алidadeĭ, шi, візînd mъiaгꙋл, вom рекꙋноаште пꙋнкtꙋл G ꙋnde лiniea datъ se tae de лiniea PQ; каpe ва fi пiчiорꙋл перпеndiкꙋларeĭ.

Ачеаstъ konstрꙋкціе este întemeiatъ пе teорema (*n*° 64). Тріꙋнгiꙋл PGD tребꙋind sъ fie dреntꙋнгiꙋ în G, sꙋma челор doъ ꙋнгiꙋрĭ але sале în P шi în D tребꙋе sъ прецꙋіаskъ 90°. Аша dap вom авеа ачеst tріꙋнгiꙋ dреntꙋнгiꙋ în G, de вom faче ꙋнгiꙋл P екꙋал кꙋ 90° maĭ пꙋцin ꙋнгiꙋл D.

45. Sъ не пропꙋнem iapъшĭ, а faче întр'ꙋн пꙋнкt шi пе о dреаntъ, ꙋн ꙋнгiꙋ екꙋал кꙋ ꙋн ꙋнгiꙋ dat.

Вom пꙋне графометрꙋл în пꙋнкtꙋл dat, шi вom dipiжа лiniea de кредinцъ пе dреаnta datъ. Вom întoарче dꙋпе ачеаsta алidada de о кitime екꙋалъ кꙋ ꙋнгiꙋл черꙋt, шi вom жалона раза візꙋалъ. Se în-

џелеџе че требе съ фачем ка съ імпърџім ꙋн ꙋнгіꙋ ін пърџі екꙋале, саꙋ съ лъꙋъм о фракџіе оаре-каре.

46. Ін сфіршіт, съ сꙋпꙋнем къ воім съ дꙋчем прінтр'ꙋн пꙋнкт дат D, о паралелъ ла о дреаптъ датъ AB.

Дака AB есте акчесібілъ (Fig. 39), вом лꙋа дꙋпе вое ꙋн пꙋнкт C, ші вом мъсꙋра ꙋнгіꙋл ACD. Дꙋпе ачеаста, ін пꙋнктꙋл D, вем фаче ꙋн ꙋнгіꙋ CDK екꙋал кꙋ ꙋнгіꙋл DCA; дреапта DK ва фі паралела черꙋтъ.

Дака AB есте інакчесібілъ, требꙋе съ алергъм ла модꙋл (*n*° 19, 2°).

Теоріеа *n*° 64.

47. Ачеастъ теоремъ фꙋндаменталъ се інтребꙋінџеазъ преа мꙋлт ін теоріе; еатъ оаре-каре дін аплікаџііле еі ін практікъ.

1° Еа імпꙋџінеазъ кꙋ о а треіа остенеала мъсꙋрії ꙋнгіꙋрілор ін тріꙋнгіꙋрі, фіінд къ дін доъ ꙋнгіꙋрі кꙋноскꙋте пꙋтем конкіде пе ал треілеа. Афаръ де мареле авантаџіꙋ че добіндім дін ачеастъ редꙋкџіе ла оаре-каре сістеме де операџії ꙋнде мъсꙋра ꙋнгіꙋрілор есте преа деасъ, маі ꙋрмеазъ къ пꙋтем кꙋноаште кꙋ кіпꙋл ачеста ꙋнгіꙋрі че нꙋ се пот мъсꙋра д'а дрептꙋл. Аша, вірфꙋл S фіінд інакчесібіл (Fig. 40), дака ам афлат къ ꙋнгіꙋріле A ші B сінт респектів де 48° ші 41°, вом авеа пентрꙋ ал треілеа S, 180° — 48 — 41, адікъ 91°. Адесеа інкъ се інтімплъ ка нꙋмаі ꙋнгіꙋл S съ фіе требꙋінчіос.

Де вом воі съ детермінъм џеометріческе пе ал треілеа ꙋнгіꙋ ал ꙋнꙋі тріꙋнгіꙋ кърꙋіа ії кꙋноаштем

пе челе-лалte доъ, вом fаче ла челе доъ estremiтъці але ѫнеї дрепте оаре-каре доъ ѫнгюрї респектів екѫале кѫ ѫнгюріле кѫnoskѫte; dinтр'ачеаstа ва резѫлта ѫн тріѫнгю ал кърѫіа ал трейлеа ѫнгю ва fi чел къѫtat.

2° Еа не ажѫтъ съ коборîm din вîрfѫл тріѫнгюрілор щарї перпендікѫлара пе басѫл лор, каре este преа требѫінчіоs пентрѫ евалѫаціеа сѫпраfеції лор. Ѫпре ачеаstа, întребѫінцъm графometрѫл, прекѫm am fъкѫt-о (44) (Fig. 38).

3° Пре ачеst прінчіп este întemeiat ѫн mod ка съ дѫчem о перпендікѫларъ пе о дреаптъ кѫ екерѫл. Fie (Fig. 152) RS дреапта, щі P пѫнктѫл dat. Вом пѫне іпотенѫsa екерѫлѫї AB пе дреаптъ, щі вом statорнічі о ріглъ пе латѫра AD а ѫнгюлѫї дрепт а екерѫлѫї. Рігла fiind біне statорнічітъ пе хîртіе, вом întoарче екерѫл, щі 'л вом пѫне în посіціеа A'D'B', а доа латѫръ а ѫнгюлѫї съѫ дрепт fiind statорнічітъ пе ріглъ. Дѫпе ачеаstа вом алѫнека екерѫл în лѫнгѫл ачеstеїа, пînъ кînd іпотенѫsa sa ва трече пріn пѫнктѫл P. Fie *mpq* посіціеа че ва авеа атѫнчї екерѫл, *mp* ва fi перпендікѫлара къѫtatъ. În адевър, în тріѫнгюл AH*m*, челе 2 ѫнгюрї din A щі din *m* sînt înведерат челе доъ ѫнгюрї аскѫціте але екерѫлѫї; аша дар ал трейлеа ѫнгю în H требѫе съ fie ѫн ѫнгю дрепт. Аша дар щчл.

Ачеst mod se sокотеще ка преа авантаціоs în практікъ, пентрѫ къ латѫра екерѫлѫї че детермінъ перпендікѫлара тае лініеа датъ, щі аша se детермінъ преа лътѫріт пічіорѫл перпендікѫларeї; не апъръm, ast-fел, прекѫm zік, де înкѫркътѫра че fаче ѫнгюл дрепт ал екерѫлѫї, ал кърѫіа вîрf este tot

d'aвna tovit. Însъ noї nв ne înkpedem ла авантацiвл aчestвї mod пentpв къ înkвpкътвpa че аpъt se поate лesne тъmъdвi кв împpeвnapea рiглеї кв екерел, кape nв tpeбве niчї o datъ sъ se întpeбвinцeze вnвл fъpъ чееа-лаltъ. Кв toate aчeastea noї npefepъm, ка maї simплв шi maї nepfeкt de кit toate modвл вpmъtop:

Fie (Fig. 153) AB лiniea, шi p пвнктвл dat. Пвnem o лaтвpъ а екерилвї пе AB în mn; statopniчim o рiглъ пе inotenвsa md, шi tpaцem екерел în лвnгвл рiглеї пînъ кînd пвнктвл p se ва întîлni de латвpа dn, în $d'\,n'$. Лesne se înцелеце къ $d'\,n'$ este пepпendiквлapa къвtatъ. Aчeastъ konstpвкцie este fondatъ пе вnгiвpiле kopesпвnzъtoape.

TEORIEA n^o 66.

48. Прiнчiпала întpeбвinцape а aчesteї teopeme s'a dat în королар.

TEORIEA n^o 67, 68.

49. De aiчї tpaцem miжлокел de a deskpie вn паралелограм, кв doъ латвpe алъtвpate шi вnгiвл konpins. Snpe aчeasta, din пвнкtвpiле A шi C ка чentpe (Fig. 41), шi кв doъ paze pesпeкtiв еквале кв челе doъ латвpe date, deskpim doъ аpквpї че se tae întp'вn пвнкt dat D. Вnind AD, CD, авem паралелограмвл черет.

D'aiчї pesвлtъ miжлокел de a fаче вn dpentвnгiв саў вn пътpat nвmaї кв екерел. Пentpв вn пътpat, snpe eksemплв: Fie A вnгiвл dpent, шi AB латвpа

вот лва AC = AB, дѕпе ачеsata din пѕнктѕріле B ші C ка чеntрѕрї, кѕ о разъ = AB, вом deskpi доъ аркѕрї каре se вор тъіа întр'ѕн пѕнкt D. Este лesne de demonstpat къ ABCD este ѕn пътpat.

50. Ал doiлea, ачеastъ teopemъ не ажѕtъ ка съ fечет о fігѕръ екѕалъ кѕ алта printр'о операціе преа лesne. Fie полігонѕл *abcdghk* пе каре воim съ tpansпортъм пе ачееашї xiptie (Fig. 44). Вом дѕче прin difepiteлe sале вîрfѕрї atîtea параллеле петъpціnite asѕпра кърора вом лва лѕнціmї екѕале *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, *gg'*, *hh'*, *kk'*. Ѕnind прin лiнії dpente пѕнкtѕріле *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *g'*, *h'*, *k'*, вом авеа ѕn полігon екѕал кѕ чел пречеdent, пеntpѕ къ dpenteлe каре ѕnesк вîрfѕріле челор доъ fігѕрї fiind екѕале ші параллеле, лiniiле *ab*, *ab'*; *bc*, *bc'*, sînt екѕале кîte доъ доъ; însъ, пеntpѕ къ еле sînt параллеле, d'ачі peзѕлtъ екѕалitatea ѕнгіѕрілор. Аша dap шчл.

Tot ачеst mod se поate întpебѕinца ла копіатѕл лiniiлор кѕрбе. Fie лiniea *abhgpruyt* каре тpeбѕе tpansпорtantъ în алтъ parte пе ачееашї xiptie. О вом desпърці în пърцї пѕ преа марї, ші вом дѕче прin пѕнкtѕріле de îmпърціре параллеле петърціnite asѕпра кърора вом лва лѕнціmї екѕале, ші ачеаsta ва deteрmina пѕнкtѕріле *a'*, *b'*, *h'*, *g'*, *y'*, *t'* (Fig. 42), каре вор fi penpesentaціеа пѕнкtѕрілор de îmпърціре але кѕрбеї date. Акѕм este лesne a ѕni пѕнкtѕріла челе поѕъ прin о tpъsѕръ копцinѕtъ, dѕкînd întpe еле аркѕрї asemenea кѕ ачелеа în каре а fost desпърцitъ кѕрба datъ.

Daка копіеа ар tpeбѕі съ se fакъ пе алтъ xîptie, не вом слѕжі кѕ ѕn alt mod каре se întpебѕinцеазъ atît ла fігѕреле dpentлiniate кît ші ла кѕрбе.

Fie *zyhtr* o кврбъ a se рапорta пе о алtъ xiptie. Bom dвче doъ dpente *ba*, *bc*, tъindв-se în вnгюрĭ dpente; шi dвпе че вош îmпърцi кврба în kîte-вa аркврĭ mічĭ, вom коборî din пвnktвpiле de îmпърцipe перпендiквларе *uv*, *yx*, *hg*, *ts*, *rk*, пе аксвл *bc*. Dвпе ачeasta вom faче пе xîptiea че trebвe sъ копiem вn алt вnгiв dpent *a′b′c′*; шi, dвпе че вom лва пе аксвл *b′c′* лвнцimĭ *b′v′*, *v′x′*, *x′g′*, pesпектiв еквале лвĭ *bv*, *vx*, *xg*, шi în пвnktвpiле *v′*, *x′*, *g′*, *k′*, вom pidiка перпендiквларе еквале кв челе коборîte în opiцiнал. Bîpfвpiле перпендiквларелор вор determina пвnktвpiле копii аналоце кв пвnktвpiле de îmпърцipe але кврбеĭ че копiem; ле вom вni прin о tръsвpъ концiнвtъ. Ачeastъ операцie преа întpeбвinцatъ în оаре-каре apte de konstpвкцie, поаptъ ачi нвmipea de tpiкaцiв.

51. În sfipшit, пвtem demonstpa аквm întp'вn кiп цeнерал teopiea компвнерiĭ пвtepiлор каре лвкреazъ asвпра вnвĭ mобiл dвпе оаре-каре dipeкцiĭ. Fie *m* (Fig. 43) mобiлвл; *m*A шi *m*B intensitъцiле шi dipeкцiiле пвtepiлор. Fie-каре se siлeшte a depъpta mобiлвл din dipeкцiea челеĭ-лалte пвtepĭ; *m*A ва sъ'л depъpteze din dipeкцiea *m*B d'о kîtime еквалъ кв перпендiквлара AG; asemenea *m*B se siлeшte a продвче depъptapea BH, adeвъpatъ distанцъ а пвnktвлвĭ B ла dipeкцiea *m*A. Aшa dap, daка întp'ачелашĭ timп mобiлвл шерцe пе *m*D, ва fi în пвnktвл D, ла distанцеле воite de amîndoъ пвtepiле; пentpв къ DK = BH, шi DC = AG; пвnktвл D este singвp каре îmплiнeшte ачeste kondiцiĭ. Aшa, în toate касвpiле, pesвлtanta este penpesentatъ în mъpime шi în dipeкцie прin diaгонала паралелограmв-

лѕĭ fъкѕt пе direкціеа ші мърімеа челор доъ пѕtері. Ачеаstъ пропріеtаtе este преа кѕпоsкѕtъ sѕбt пѕмеле de teоремъ а параледограмѕлѕĭ пѕtерілор.

Daка маĭ мѕлtе пѕtерĭ ар fi лѕкрат întр'ачееашĭ време asѕпра ѕпѕĭ мобіл, еле ар fi авѕt іаръшĭ пѕмаĭ о резѕлtапtъ: пепtрѕ къ доъ оаре-каре компъindѕ-se întр'ѕпа sіпгѕръ, ачеаsta se ва комбіпа кѕ о а treĭа, резѕлtапtа кѕ о а патра, ші аша маĭ îпколо, пîпъ ла чеа din ѕрмъ diагопалъ каре ва fi резѕлtапtа а toatъ sistema. Daка din întîмпларе чеа d'înаinte челеĭ din ѕрмъ ва fi екѕалъ ші опѕsъ челеĭ din ѕрмъ, еле se вор desfiinца ѕпа пе алtа, ші волѕміпѕл въ ръмîпеа în екѕілібрѕ întре еле.

52. Прінчіпѕл параледограмѕлѕĭ de пѕtерĭ este destѕл ка sъ пе добеdеаsкъ мішкареа кѕрвілініе а пъмîпtѕлѕĭ ші а tѕtѕлор плапеtелор împрежѕрѕл soареlѕĭ. Пъмîпtѕл, sпре ексемплѕ, este sѕпѕs ла акціеа а доъ пѕtерĭ: ѕпа de атракціе кътре soаре, каре îл траце кътре чепtрѕл ачеstеĭ stеле, прекѕм гревtатеа îпdрептеазъ кътре пъмîпt трѕпѕріле sѕбtлѕпаре; чееалалтъ este о пѕtере de проіекціе, dѕпе каре ел а fost asвîрліt în sпачіѕ de Креатор. Fie bg (Fig. 47) пѕtереа проіекціеĭ, adікъ drѕмѕл че în віртѕtеа ачеstеĭ пѕtерĭ пъмîпtѕл ар петрече întр'о secѕпdъ; fie ba атракціеа кътре soареле S; пъмîпtѕл ва петрече diагопала bo. Daка атракціеа ва îпчеtа de а лѕкра, пъмîпtѕл din прічіпа мішкърії пріімиtе, ва петрече întр'о secѕпdъ $oh = ob$; dар атракціеа od tot лѕкрîпd, пъмîпtѕл se ва редѕче în diагопала oi. Фъръ de атракціеа че лѕкреазъ dѕпе ik, пъмîпtѕл ва ѕрма пе ir; dар прінtр'ѕп asемепеа раціопамепt, ел ва

вeni în *im*, ші аша maĭ înколо, петрекînd ѕn шір de diaгопале іпеквале, каре кad кътре soape, ші каре împреѕпъ fак о лініе sfъpîmatъ поліговалъ, каре, dѕпе чіркопstъpĭ, ар пѕtea fi peintpîndъ asѕпра еĭ însешĭ, saѕ петърціnitъ. Dap fiind къ атракціеа лѕкреazъ, пѕ din sekѕndъ în sekѕndъ, чі în fie-каре кліпъ петърціnitъ de mikъ, ѕpmeazъ къ diверseле diaгопале вор fi піште лѕпцімĭ петърціnit мічĭ. Аша dap поліговѕл ва fi о кѕрбъ, а къріia патѕръ ва depinde de рапортѕріле dipekціі ші ювцелеĭ че вор eksista întpe пѕтеріле iniціале.

53. Орбітеле планетаре sînt кѕрбе peintpînde, ші de патѕра ачелора че ле пѕmesk еліпsѕpĭ; soapeле пѕ este eksakt în міжлок. Гъsim пе пъмînt eksemпле de кѕрбе produѕse de о компоsiціе копціnѕtъ de доъ пѕтерĭ. Asl-feл sînt лініiле че deskpiѕ în sпачіѕ toate tpѕпѕpiле asвipлite întp'о dipekціе певертікалъ; кѕрбе преа simціbiле ла бомбе, maĭ пѕцin simціbiле, dap peaле în мішкареа гюлелелор, каре se кобор кътре пъмînt de ші fѕцind ла ешіре din tѕп întp'о distanціе maĭ opizontaлъ. Ачеаsta este peзѕлtatѕл пѕтерiĭ de impѕлsie, комбinatъ кѕ акціеа копціnѕtъ а греѕтъціĭ saле; кѕрба резѕлtatъ se пѕмеште о *параболъ*. Daka dipekціеа tpъsѕpeĭ ар fi tot ѕпа кѕ paza вizѕалъ îndpeptatъ кътре обіектѕл че воim sъ ловім, гюлеаоа п'ар înemepi нічĭ о datъ. Dap, din фачереа tѕпѕлѕĭ, аksѕл съѕ se pidikъ tot d'аѕпа кътре лініеа de mip, adikъ paza вizѕалъ CV (Fig. 52); гюлеаоа о tae întîia оаръ în M, dѕпе ачеаsta а доа оаръ кобоpîndѕ-se întp'ѕп пѕпkt B. Ачеаsta se фаче ка кѕm dipekціеа tpъsѕpiĭ ар ѕpmа eksakt лініеа mipѕлѕĭ пîпъ în пѕпktѕл B.

Distanца CB se нѹmеште бътaea tѹnѹлѹĭ. Aiчĭ am ажѹns ла ѹn лок а кърѹiea esплоatаціе ар fi interesantъ; dap ne-am абътѹt преа mѹлt de цinta noastpъ; вom аръta нѹmaĭ кît ѹn пpiнчiп simплѹ шi абstpakt ка aчesta каре ne-a dat aчeastъ апликаціе, este podnik în konsekѹinце întinse каре нiчĭ къ ne-ар fi трекѹt прin rînd ла înчепѹt.

Кѹ toate aчestea noĭ нѹ пѹtem пъръsi aчest sѹбiект фъръ de а пomeni ѹнѹл din efектеле челе maĭ însemnate але паралелограmѹлѹĭ de пѹтерĭ. De вom ласъ sъ казъ о пiatpъ din вîpfѹл каtaptѹлѹĭ ѹнеĭ корънiĭ în miшкаре, s'ар пъреа къ пiatpa ар къdea пе tiлак mѹлt maĭ îndъpъt de пiчiорѹл каtaptѹлѹĭ, saŭ къ ар къdea în апъ. Însъ, алt-fел se întîmплъ: пiatpa вine de ловеште пiчiорѹл каtaptѹлѹĭ deскpiind о кѹрбъ каре se паре оаmeniлор din кораbie odpeaпtъ вертiкалъ, dap а къpiia кѹрбѹръ este simціbiлъ обserвatopiлор депъртаці. Пpiчina este къ пiatpa, în miнѹтѹл че este лъsatъ греѹтъціi sale, se împъртъшеште de miшкарea кoръбii кѹ mîna че о ціне; ea se sѹпѹne dap ла doъ пѹтерĭ; de aчi о diагоналъ кѹрбъ, каре, депъртîndѹ-se de вертiкалъ пропорціонал кѹ юцеала кoръбii каре dѹче aчeastъ вертiкалъ кѹ sine, требѹе tot d'аѹна sъ коinчidъ кѹ aчeastъ вертiкалъ шi sъ казъ ка шi dînsa ла пiчiорѹл каtaptѹлѹĭ. Пpiчina пentpѹ каре кѹрба нѹ este simціbiлъ пе кораbie, este къ aчeia каре se afлъ întp'însa se împъртъшеsк din miшкаре. Se poate înцелеце dѹпе aчeasta пentpѹ че, daка вiзъm ла ѹn обiект, dintp'о тръsѹръ în miшкаре, шi арѹнкъm о пiatpъ, нѹ înemepim нiчĭ о datъ, пpoiектiлѹл требѹе sъ ловеаskъ dinколо în sensѹл miшкърiĭ тръsѹреĭ.

TEORIEA *n°* 71, 72.

54. Din teopema *n°* 71 pesȣлtъ nemiжлочit miж-
локȣл de a înskpi ȣn eksaгon în черк; чееа че este
miжлокȣл de a fopma eksaгonȣл. Ачest полiгon este
fiгȣpa ȣпор вasine, ȣпор чitadeле, шi a кърършizi-
лор че аштерпеш пpin kaseле noastpe.

Bîpfȣpiле posei кȣ шase foĭ, kape se noate de-
skpi de opĭ-чine întp'ȣn черк, detepminъ ȣn eksaгon
(Fig. 48). Se штie къ înfirînd ȣn bîpf de komnas пe
чipkonfepinцъ, кȣ o deskidepe eкȣалъ кȣ paza, de-
skpim apкȣpĭ че tpek neгpeшit пpin чentpȣл; шi,
fiind къ пpeȣmвлъm ачeastъ deskidepe пe чipkonfe-
pinцa sa, tpeвȣe dȣпe a шasea mȣtape, sъ ажȣnцem
ла пȣnktȣл de ȣnde am плекat, ast-feл în kît apкȣ-
piле deskpise ажȣnг ла estpemitъцiле латȣpелор ek-
saгonȣлȣĭ. Neîngpiжind din doъ în doъ пȣnktȣpiле
ast-feл detepminate, авem o posъ кȣ tpeĭ foĭ але
кърiia bîpfȣpĭ konpind латȣpеле ȣnȣĭ tpiȣнгiȣ ekȣi-
латep.

55. Штim înkъ къ eksaгonȣл este fiгȣpa kiлiȣ-
цeлор албiнелор, шi nȣ штim de че sъ ne mipъш
maĭ mȣлt, saȣ de nepfekta peгȣлapitate a eksekȣцii
лор, saȣ de înцeлeaпta лоцiкъ kape ле-aȣ detepmi-
nat a алеце ачest полiгon. Sъ ne опpim пȣцin ла
anaлisa ачestei minȣnate apшitektȣpĭ; maĭ mȣлцĭ în-
въцaцĭ aȣ meditat mȣлtъ bpeme fenomene natȣpaле,
maĭ пȣцin minȣnate, maĭ пȣцin fpȣmoase, în toate
kinȣpiле maĭ пȣцin bpedniче de admipaцiea лор.

Ni se пape ла întîia къtape къ fopma чipкȣлapъ
s'ap fi кȣвenit maĭ вine ачestop miчĭ kiлiȣцe, пentpȣ
къ ea este anaлогъ кȣ taлiea pondoлetъ a insektei.

Dap atsnчĭ din doъ лsкрsrĭ sna: saš вop ръmînea локsрĭ întpe чеpкsрiле ţanџente каpe вop face кiлiѕ-џеле, чееа че ap fi fost о пеpdеpe de лок шi о des-пsнеpe пs пpea faвopaвiлъ ла soлiditatea diвеpseлоp пъpџĭ а ле edifiчiѕлsĭ; saš къ ачеste локsрĭ гоале se вop sмплеa de чеаpъ шi de miеpe ка шi кiлiѕџеле; dap atsnчĭ ачеste пpовiziĭ s'ap пеpde, пentps къ а-чеste intеpвале пs ap пstea sлsжi de magaziĭ ка кi-лiѕџеле пpiнчiпале, fiind къ din пpiчina stpimtоpъ-piĭ лоp inseкtеле пs пot intpa întp'înseле ка съ лs-кpeze. Tpeвse dap съ se лase de fopma чipкsла-ръ, шi съ пpiimeaskъ пpin spmape fopma полiгона-лъ; dap каpe tpeвse съ алеагъ? Înвedepat полiго-нsл pегsлat; dap нsmaĭ tpeĭ полiгоане sînt че se пot întpeвsinџa, adiкъ, пatpatsл, tpiѕнгiѕл екsiла-tеp шi екsагонsл. Întp'adeвъp, tot sпaџiѕл împpe-жsрsл snsĭ пsнкt пpeџsind 360° se поate sмплеa пpin шase sнгiѕрĭ de tpiѕнгiѕрĭ екsiлatеpе, din каpe fie-каpe пpeџsesк 60°, saš пpin пatps sнгiѕрĭ de пa-tpate, din каpe fie-каpe пpeџseшte 90°, saš în sfîp-шit пpin tpeĭ sнгiѕрĭ de екsагон, пpeџsind fie-каpe 120°; niчĭ sn алt полiгон пs поate sлsжi ла ачeasta; пentps къ sнгiѕл пentагонsлsĭ пpeџsind 108°, tpeĭ пentагоане вop da 324°, каpe пs sînt destsле; пatps вop da 432°, чееа че este пpea msлt. Шi fiind къ tpeĭ екsагоане пe sînt de ажsns, tpeĭ полiгоане de maĭ msлte лatspe вop fi пеgpeшit пpea msлte. Аша dap алеџеpea пs поate къdea de кît нsmaĭ пе sнsл din челе tpeĭ полiгоане чitate.

Dap doъ кsвinte mapĭ пе îmвpînчеsк спpe екsа-гон: економiеa локsлsĭ шi а matepiaлsлsĭ întpeвsin-џat ла konstpsкџiĭ. Zik întîis економiеa локsлsĭ;

пentpв къ, de вош eксаmina кв лваре aminte figвра 49, каре este коmпвsъ de шase tpiвпгiврi ecвiлatepe în каре sînt înskpise черквpiле kopesпвпzътоape ла чea mai mape dimensie a tpвпвлвi албiпei, шi pe-пpesentînd aша чел mai mik sпaцiв tpeбвinчios ла înлesnipea mішкърiлор лор, вom квпоашtе къ чiр-konskpiind eксаroane ла aчeste шase черквpi, pъ-mîne вп sпaцiв intepiop каре шi ел este вп eксаroп, шi în каре пвtem skpi вп ал шaпtелеa черк eквал кв чeле пpeчedente. Bom mai însemna къ în fie-каре dintp'aчeste шase впгiврi але eксаroпвлвi че pesвлtъ din впipea a шase tpiвпгiврi eквiлatepe, пв-tem skpi o пapte de черк пpeквm este cmk, каре se квпоашtе лesne къ este a tpeia пapte a впвi черк întpeг. Aша dap, întp'aчелашi sпaцiв în каре албi-пеле п'ap пвtea пвпе de kît шase kiлiвцe, daka a-чestea ap fi аввt fopma tpiвпгiврiлор eквiлatepe, еле вор пвпе поъ, пpiimind sistema eксаroпвлвi. Aша dap, еле fak пe sпaцiвл че копpind fагвpii лор o eкопошie de o a tpeia.

Zik, ал doiлea, къ еле eкопоmisesk шi din ma-tepiea întpeбвinцatъ ла konstpвкцii. Se квпоашtе, întp'adeвър ла черчetapea aчелeiaшi figвpi, къ чеlе шase tpiвпгiврi eквiлatepe aв o sвmъ de лatвpe eкв-але кв 12, шi eксаroaneле o sвmъ de лatвpe eквале кв 30. Dap лatвpa впвi tpiвпгiв eквiлatep este în-tpeitъ de kît aчeea a впвi eксаroп (Fig. 50); пentpв къ tpiвпгiвл VAp este вп tpiвпгiв eквiлatep, fiind къ впгiвл sъв în A = 60°, шi къ впгiвл Apr, fiind sвплimentвл впгiвлвi eксаroпвлвi каре пpeцвeste 120°, пpeцвешtе шi ел 60°. Aша dap лatвpa eксаroпвлвi, saв pq, este eквалъ кв pA, шi пentpв aчелашi кв-

вînt кѕ *q*В. Аша dap латѕра ексагонѕлѕї fiind 1, ачееа а trіѕнгюлѕї екѕілатер înконжѕрътор ва fi 3; аша dap челе 30 de латѕре але ексагоанелор вор преџѕі 30; ші челе 12 латѕре але trіѕнгюрілор вор преџѕі 12 × 3 saѕ 36; este dap înвеdeратъ економіе пе feџеле кілѕџелор în sistema ексагоналъ, ші ачеаsta în рапортѕл лѕї 36 : 30 saѕ а лѕї 6 : 5.

Компараціеа орdінѕлѕї пътрат кѕ орdінѕл ексагонал нѕ se поаtе faче аша de лесне прін fігѕръ; еатъ міжлокѕл че se întребѕінџеазъ. Лѕînd пентрѕ ѕніше раза черкѕлѕї înскріs, калкѕлът прін міжлоачеле че se вор гъsі ла теоріеа sѕпрафеџелор, тъsѕра черкѕлѕt каре este 3,1416; ачееа а trіѕнгюлѕї чіркоnскріs каре este 5,1908, ші în sfîршіt ачееа а ексагонѕлѕї тотал каре este înшъsітъ, saѕ 31,1450. Sѕпрафаџа пътратѕлѕї чіркоnскріs ла черк ва fi înвеdерат 4, пентрѕ къ латѕра sa ва fi 2; împърџіnd sѕпрафаџа ексагонѕлѕї челѕї маре прін 4, вом afла 7,779 пентрѕ нѕмърѕл пътрателор каре вор окѕпа ачелашї спаціѕ ка ші челе шаse trіѕнгюрї saѕ челе поъ ексагоане. Калкѕлѕл dъ asemenea пентрѕ преџѕл латѕреї ексагонѕлѕї чіркоnскріs нѕмърѕл 1,1535, ші прін ѕрмаре întреітѕл saѕ 3,4605 пентрѕ латѕра trіѕнгюлѕї екѕілатер, аst-фел în кît sѕма латѕрелор trіѕнгюрілор este 3,4605 × 12 = 41,5206, ші ачееа а челор 30 de латѕре але ексагоанелор este 1,1535 × 30 = 34,605. În кît пентрѕ sѕма латѕрелор пътрателор, pînдѕіndѕ-ле ка în fігѕра 49, вом afла къ челе 7 пътрате ші жѕмътате fъкînd полігонѕл *adrkgb* аѕ о sѕмъ de латѕре = 20, dіагонала *kg* некопрінzînдѕ-se. Însъ, нѕмърѕл тотал ал пътрателор требѕе sъ fie 7,779, din каре авем 7,5; требѕе

dap sъ лвъш пе *gn* o лвнціmе *gh* ast-feл în kît tpiвпгівл pesвлtant *gkh* sъ fie *a* 0,29 dintp'вn пъtpat. Dap шtim din тъsвpa sвпpafeцeлop къ ачеаstъ лinie tpeбве sъ fie îndoitъ de 0,29; аша dap *gh*=0,58, че tpeбве adъoгat ла sвma aфлatъ 20; каpe dъ 20,58, пвтър каpe, înmвлціt npin 2, npeцвл лatвpeї пъtpatвлвї, dъ 41,16 пentpв npeцвл totaл ал лatвpeлop. De вnde se веde къ челe tpeї sisteme але tpiвпгівлвї, а пъtpatвлвї шi а eksaгoнвлвї вop da пentpв кeлtвeлї pesпektive пвmepeлe 41,526... 41,16... 34,605... Аша dap алецеpea eksaгoнвлвї epa înкъ în paпoptвл ekonomii matepii maї npeфepaбiлъ de kît челe-лaлte doъ.

Аша aлбiнeлe aв̆ desлeгat шi desлeг înкъ în toate zileлe ачea minвnatъ пpoблeтъ: А акопеpі вп sпaціў dat кв fiгвpї pегвлate kît de mвлte se ва пвtea, кв лвкpв шi mатеpie kît se ва пвtea maї пвціnе.

Nв este însъ destвл. Se шtie къ faгвpiї sînt коmпвшї de doъ sisteme de кiлiї, каpe se deskid în doъ feцe oпвse; însъ ast-feл sînt алъtвpate, în kît аксвл fie-къpiia кiлiвце întîлneшte de чеа-лaлtъ partea пвнктвл de вnipe ал челop tpeї eksaгoane че se вnesk, шi fвndвл este кomпвs de tpeї пъpeцї плanї каpе se tae sвбt ast-feл de внгівpї în kît sпaцівл пepdвt este iapъшї чел maї mik че se поate. Ачеаstъ teopie este pesвлtatвл вneї Цeometpiї npea înaлte ка sъ se eksпве aiчї; пentpв чеї че o npiчеп, miparea este пemъpцinitъ; къчї цeniвл omвлвї, adiкъ конквpsвл peфлекціi, ал шtiinцeї шi ал indвstpii, n'ap пвtea sъвîpшi вп лвкpв maї бine кaлквлat шi maї pepfekt (везї pекpeаціiле mate-

mat., tom. II). Dap sъ ne întoapчem ла eksaroaнеле noastpe.

Aчeastъ minsnatъ peгsлapitate s'a fost oбsepвat de чeĭ векĭ, кърора нs ле-аŭ skъпat din вedepe oape-каре рацisнĭ џeometpiче че ар fi пstst sъ îndeшne пе алвine ла алеџереа aчesteĭ firspĭ. Еĭ аŭ peкsnoskst, еĭ s'аŭ mipat de aчest лsкps înџелeпt, ка de о dipeкџie пpoвidenџiалъ, шi se minsneazъ кsm fanta diвinъ а пstst întîmпina opвĭ în înaлтеле sfepĭ але inteлiџenџeĭ. De ар трeвsi sъ кpedem пе sn om ал кърsia нsme нs пstem чita aiчĭ фъръ а не рsшinа de џeniŭ, нs ар fi în пpiimipea firspeлop eksaroane de алвine niчĭ о рацisne пozitiвъ, niчĭ sn skoп лоџiк. Dsпе кsm ziче Bisfon, aчeastъ fopmъ ар pessлта dintp'aчeasta къ, în konstpsкџiea sшspeлелop лор zidspĭ, алвinele, каре лsкpeazъ de о datъ, se îmвpînчesk întpe еле, шi кs пstepĭ eksале, чeea че трeвsе sъ пpodsкъ firspa peгsлatъ каре se апpoпie maĭ msлt de чepк. Шi înкъ, ел kompapъ aчest efeкt кs sвipчitspiле че faче mazъpea вepde kînd se пsне în апъ feaptъ; aчeste sвîpчitspĭ але пeлeĭ, каре se fак din întindepea sniformъ а abspsлsĭ d'înъsntps, аŭ, întp'adeвъp, пе iчĭ шi колеа о fopmъ maĭ eksaroпaлъ.

Ns este niчĭ sn лsкps op-kît de aбsspd, а zis de msлt Чiчepon, каре sъ нs fi тpeкst пpin капsл вpe snsĭ filosof; шi aчeastъ teopie а mapeлsĭ nostps natspaлist sinrspъ este destsлъ ка sъ adeвepeze aчest пpoвepв. De ар fi fost трeвsinџъ sъ pesпsndem sepios ла aчeste tiкълoase apгsџiĭ, am întpeва кsm чinчĭ-sпpe-zeче miĭ de insekte лsкpînd кs пiчioapeле, кs капsл шi кs dinџiĭ, фъръ pîndsiaлъ, фъръ simsлtaneitate niчĭ

în totȣл, nічĭ maĭ вîptos în amъpȣnteлe fanteĭ, шî înfъцішînd npetȣtindenea nȣmaĭ sȣnpafeцe кȣрве, ap nȣtea sъ fakъ ast-feл чінчĭ-ѕпре-zече miĭ de кȣtiĭ преа регȣлate, копрinse sȣвt feцe преа плane шi преа екȣале, шi sȣвt o sȣtъ de miĭ de ȣнгȣрĭ екȣале каре se пар a еші toate dintр'ȣn ачелашĭ tinaр, шi каре кȣ toate ачестеа sînt реfлекціеа atîtор кȣцеtърĭ кîцĭ лȣкрътоpĭ sînt întр'ачеst sapaiȣ de mȣцĭ. Шi че ар ziче ȣн кредinчios ла ачеаstъ армоnie de neopîndȣіалъ, de 'ĭ вом аръta търціnіле fагȣрілор în лȣкрȣ, каре se терminъ npintр'ȣn шір de екsaгoane комплекте, шi каре n'aȣ sȣfepit акціеа nічĭ ȣнеĭ апъsърĭ din afapъ. În sfîршit че se ва fаче ачеаstъ теорie înaintea кіліілор somnтȣoase ȣnde треве sъ лоkȣіаskъ îшпърътеseле, кіліȣце mȣлт maĭ mapĭ, maĭ masive, maĭ îmпоdoвite de кît toate челелалте, шi a кърор архitектȣръ шi регȣлаtitate nȣ noate fi продȣsȣл mекanік ал ачелорашĭ прічinĭ? Шi nȣ zік nimік nентрȣ кіліiле трînторілор, кіліĭ mȣлт maĭ mapĭ de кît toate кіліiле алвinелор mȣнчitoape, шi a кърора konstрȣкціе чере прin ȣрmаре оаре-каре modifikaцiĭ în mаневреле лȣкрȣлȣĭ, фъръ ка регȣларitatea sъ se skimве кît de nȣцin.

Ла ведерea ȣнȣĭ instinkt atît de жȣdічios, шi a ȣнеĭ адрese noate шi maĭ mȣлт вредmікъ de mipat, este silit чine-ва sъ аплаȣde ла ачеste ideĭ але челор векĭ:

> Esse apibus partem divinæ mentis, et haustus
> Æthereos dixere . . .
>
> Virg. Georg. 4.

Sinгȣръ esплікаціе nȣtinчioasъ a ȣнȣĭ fenomen че

mintea nȣ poate esплika, шi пe kape ȣn poet mo-depn a tpadȣs maĭ fiлosofeшte пpin ȣpmътopȣл veps:

Arguit in fabro, non in se machina mentem.
(Anti-Lucrece).

(Teoriea n^o 73 — 81).

DESПPE ЛINIЛE ПPOПOPЦIONAЛE ШI FIГȣPEЛE ASEMENEA.

56. Noĭ nȣ пȣtem maĭ вine sъ kapaktepisъm a-чest пapagpaf, шi sъ fačem a i se пpeцȣi impoptan-цa, de kit zikind kъ eл este în Цeometpie чeea чe пpoпopцiiлe sint in Apitmetikъ. O mȣлцime de чe-pepĭ se pedȣчe лa aчeasta, шi este вasȣл чeлop maĭ mȣлte oпepaцiĭ aлe Цeometpii пpaktiчe. Pidikatȣл плanȣpiлop, fačepea xapteлop, sint nȣmaĭ o aпplika-цie kontinȣaлъ a aчestop пpinчiпe. Noĭ vom da o pesksptape de aчeastъ aptъ atit de foлositoape; dap maĭ întiĭ vom esпȣne kite-va aпплikaцiĭ deoseвite.

АПЛIKAЦIĬ NȢMEPIЧE.

I.

57. A mъsȣpa înълцimea ȣnȣĭ edifičiȣ dȣпe ȣm-вpa sa.

Fie SA (Fig. 53) edifičiȣл чe voim ka sъ mъsȣ-pъm, шi AB ȣnвpa sa. Vom înfiцe veptikaл în пъ-mint ȣn вaston *ad*, kape va da o ȣmвpъ *ab*. De vom nȣmi X înълцimea din vipfȣл edifičiȣлȣĭ, L лȣn-цimea ȣmвpeĭ saлe, *b* înълцimea вastonȣлȣĭ, шi *l*

înълцimea ѕmбреї ѕале, вom авеа înълцimea къѕtatъ x прin пропорцiea

$$l : b :: L : x$$

În adeвър, dѕпе прiнчiпѕл fisik къ разеле soaрелѕї sînt параледе, разеле SB, db, каре, atingînd вîрfѕрiле edifiчiѕлѕї шi ал бastonѕлѕї, determinъ пе пъmînt вîрfѕрiле ѕmбрелор, фак, кѕ вертiкалеле че trек прiн търцiнiле лор, ѕнгiѕрї екѕале. Трiѕнгiѕрiле dab, SAB sînt кътре ачеstea dрептѕнге; аша dар ачеste трiѕнге sînt asemenea шi daѕ пропорцiea de maї sѕs. Fie $b = 0^m,88$, $l = 0^m,54$, $L = 65^m,10$, вom afла $x = 106^m,1$. Atîta este înълцimea din вîрfѕл edifiчiѕлѕї.

Este înбedepat къ требѕе sъ тъѕѕрът ѕmбра înчепînd, нѕ de ла пiчiорѕл edifiчiѕлѕї, чi de ла проекцiea opizontaлъ a пѕнктѕлѕї вîрfѕлѕї. Пentpѕ ачеasta, о тъѕѕръш întîiѕ пînъ ла пiчiорѕл edifiчiѕлѕї, шi dѕпе ачеasta adъогъш distanцa de ла ачеst пiчiор ла проекцiea вîрfѕлѕї, каре о determinъm din окї пе пъmînt, шi каре преа des se поate кѕноаште кѕ пречisie, лѕînd жѕmътаtea гроsimiї клъdipiї.

Dака пъmîntѕл нѕ este opizontaл, нѕmaї план sъ fie, кѕноаштеm къ трiѕнгiѕрiле sînt iаръшї asemenea, шi вош калкѕла ка sѕs.

În sfîршit, în лок de a лѕа ѕн бaston ка sъ фачеm ѕmбра de компарацiе, обserваторѕл se поате slѕжi кѕ ѕmбра трѕпѕлѕї sъѕ; sпре ачеastа, se пѕне dѕпе вое, însъ аша în кît ѕmбра крештетѕлѕї sъѕ sъ казъ ла марцinea вре-ѕнѕї обiект statopnik, прекѕm ѕн копачiѕ, о пiatръ, шi sъ se înвîpeaskъ astfел în кît dipeкцiea ѕmбреї sъ fie перпендiкѕларъ кѕ dipeкцiea пiчioareлор алътѕрate. Лѕнцimea ѕm-

вреї saле este atѫnчї екѕалъ кѕ distanцa лinii пічіoa-релор ла обіектѕл statopnік; ачеastъ лѕнцime se поate преа лesne тъsѕра dѕпе че i se вор însemnа estpemitъцiле; шi fiind къ fie-каре кѕноаште, saѕ̆ поate кѕноаште кѕ пречisie taлiea sa, ва пѕtea лesne фаче пе пъmînt saѕ̆ a казъ калкѕлѕл de maї sѕs.

II.

58. А тъsѕра о înълцime кѕ о orлindъ.

Пѕне о orлindъ opizontaлъ întp'o depъptape oape-каре de пічіорѕл копачіѕлѕї PS (Fig. 54); dѕпе а-чeasta пѕне-te aша în кît imaцina віpfѕлѕї S съ se вazъ în *m*, ла mapцinea orлinzii. Întp'aчeastъ posi-цie, atîpnъ ла окіѕ̆ ѕн fip кѕ плѕmб *op*, кape съ în-tîлneaskъ пъmîntѕл întp'ѕн пѕнкt *p*, шi mъsoapъ *op*, *pm*. Мъsoapъ dѕпе aчeasta пе *m*P. De вom пѕmi *x* înълцimea копачіѕлѕї, ел ва fi ал 4-лea tepmin ал aчestеї пропорції:

$$mp : po :: m\mathrm{P} : x.$$

În adeвъp, dѕпе пpinчiпѕл fisik ал екѕалiтъцiї ѕн-гіѕлѕї de peflекцie кѕ ѕнгіѕл de inвidinцъ, paza de inвidinцъ S*m* шi paza de peflекцie *mo*, кape fак imaцina обiектѕлѕї, fак, кѕ opizontaлa, ѕнгіѕpї екѕ-але. Тріѕнгіѕpiле *m*PS, *mpo*, sînt кътpe aчestea dpentѕнгe; aша dap sînt asemenea шi daѕ̆ пропор-цiea de maї sѕs.

Aчest miжлок de mъsѕpat este maї пѕцin пpeцѕit în пpaktiкъ de kît пpeчedentѕл, пentpѕ къ întpe aлte гpeѕtъцї ѕна este шi aшezapea orлinzeї пpea opi-zontaл; aлt-fел paza de peflекцie шi paza de inвi-dinцъ нѕ maї fак кѕ opizontaлa ѕнгіѕpї екѕале, шi

тріѕпгюріле пѕ шаї sînt asemenea; dap пѕtem пѕпе în локѕл огліnzeї ѕп вas кѕ апъ, а кърѕіа ѕѕпрафа-цъ este tot d'аѕпа opizontалъ.

III.

59. А тъѕѕра distanца ла ѕп пѕнкt de каре пѕ не пѕtem апропііа.

1° Кѕ графоmetpѕл (Fiг. 55).

Fie AT distanца че требѕе ѕъ тъѕѕрът; вom лѕа о лѕнціme оаре-каре AB, înaintea обstаклѕлѕї, ші пѕind instpѕmentѕл în пѕнкtѕріле А ші B, вom тъѕѕра ѕпгюріле formate întp'aчeste пѕнкtѕрї de ра-zеле вiзѕале AT, BT. Fie AB = 225^m, вom траце пе xîptie о лiniе de 225 miлimetpe, în челе доъ estpemitъцї але кърііа вom faче кѕ рапорtорѕл, saѕ кѕ ажѕtорѕл ѕпеї табле гоniometpiче (33), доъ ѕп-гюрї екѕале кѕ ѕпгюріле тъѕѕрate. Dintp'aчeasta ва peзѕлta пе xîptie ѕп тріѕпгю asemenea кѕ ABT, пеn-tpѕ къ вор авеа доъ, ші пріn ѕрmаре тpeї ѕпгюрї екѕале; аша dap лаtѕреле omoлoaце вор fi пропор-ціонале; аша dap тъѕѕрînd în miлimetpe лаtѕра ко-респѕнzътоаре пе xîptie кѕ лiniеа AT, вom авеа în metpe лѕнціmea ачестеї лiniї.

Nѕ este tot d'аѕпа неапърат требѕinчios а лѕа miлimetpѕл пentpѕ metpѕл; ѕпішеа каре пе xîptie ва репресента пе чеа de пе пъmînt, este преа ap-бitpapiъ, dap ѕѕпѕѕъ търімії xîptii. Noї însъ pe-komandъm скала de a miiлea saѕ miлimetpѕл пentpѕ metpѕл, fiind къ еа ва fi maї tot d'аѕпа ко-modъ, ші пentpѕ къ întpeбѕінцареа дѕблѕлѕї dechi-metpѕ faче операціеа преа înлesniчioaѕъ.

Кѕ кіпѕл ачеstа пѕtem тъsѕра лърџітеа ѕпеї тірле; depъpтарea de ла църт а ѕпеї коръбії че а sлобоzit апкора, шчл., шчл.

60. 2° А тъsѕра фъръ графометрѕ.

Fie P (Fig. 56) ѕп пѕнкt dat de ла каре se чере а преџѕі distanџа ла ѕп пѕнкt de каре пѕ не пѕtem апропііа O. Ne вom depъpta пе лініеа PO, ші fie пѕнкtѕл A о позіџіе ла каре не вom опрі пе ачеаstъ аліпіере, ачі вom пѕне ѕп тъіаг. Dѕпе ачеаstа вom pidiка în A, пе лініеа PA, о перпепdікѕларъ AB, de о лѕпџіme арвітраріъ, dар кît se ва пѕtea de mаре; апої вom pidiка пе ачеаstъ din ѕрmъ în B о а doa перпепdікѕларъ пе каре пе вom depъpta пînъ кînd вom ажѕпџе ла о позіџіе G, astfeл în кît ѕп шъіаг I пе каре іл вom fi пѕs dѕпе вое пе AB, sъ fie în аліпіереа GO, adiкъ sъ se паръ kotропindѕ-se кѕ пѕнкtѕл O. Sъ înseмпъш пѕнкtѕл G, ші sъ тъsѕръш пе AI, IB, BG, distanџа AO ва fi ал 4-леа tерmin ал пропорџії: IB : BG :: IA : $x =$ AO, fie AI $= 75^m,25$, IB $= 17^m,12$, BG $= 45^m,08$, авem 17,12 : 45,08 :: 75,25 : AO $= 198^m,14$, преџ din каре пѕtem skoate de вom воі distanџа AP. Noї рекоmandъm а se лѕа кît se вор пѕtea de лѕпџї лѕпџімеле че sînt а se тъsѕра AI, IB, BG; кѕ toate ачеstea, ачеst mod пѕ dъ о пречізіе екѕалъ кѕ ачееа че dъ графошетрѕл.

IV.

61. А тъsѕра distanџа а doъ пѕнкtѕрї de каре пѕ пе пѕtem апропііа.

1° Кѕ графометрѕл.

Fie M, P (Fig. 57) челе doъ пѕnktѕpĭ deспре kape пе este ворба. Se чере a se тъсѕра лѕnџimea MP. Sпре ачеаsta, вom тъсѕра d'o kam datъ, dѕпе modѕл пречеdent, челе doъ distanџe AM, AP, dѕпе ачеаsta вom тъсѕра кѕ графometpѕл ѕnгюл A. Фъкind апоĭ пе хîptie ѕn ѕnгю екѕал кѕ A, пе латѕpеле кърѕia вom пѕпе în mілimetpe, doъ лѕnџimĭ екѕале кѕ латѕpеле AM, AP, че ле кѕnoaштem în metpѕpĭ, шi isпръвind tpiѕnгюл, вom авеа пе хîptie ѕn tpiѕnгю asemenea кѕ tpiѕnгюл AMP de пе пъmînt, пentpѕ къ аŭ ѕn ѕnгю екѕал коnpins între латѕpe пропорџioнале. Аша dap лѕnџimea AT se ва афла pedѕsъ пе хîptie în mілimetpe пentpѕ metpe; чееа че о ва фаче кѕnoskѕtъ.

62. 2° Фъръ графometpѕ. Dѕпе че вom detepmina лѕnџimiле AM, AP (Fig. 57) прin modѕл (n^o 60), аліniереле ачестор doъ лiniĭ fiind кѕ пъieџe, вom лѕа о лѕnџime арбitparіъ AB, dѕпе ачеаsta о а doa лѕnџime AD, ast-феl în kît sъ авem AP : AM :: AB : AD. De вom ѕni пе BD, tpiѕnгюл ABD ва fi asemenea кѕ tpiѕnгюл APM, пentpѕ къ вор авеа ѕn ѕnгю екѕал коnpins între латѕpe пропорџioнале. Sъ тъсѕpъm пе BD, шi вom афла PM прin пропорџiea AB : BD :: AP : PM.

Fie AM = 311^m,10, AP = 345^m,02; sъ лѕъm dѕпе вое пе AB = 100^m, вom авеа, пentpѕ AD, ал паtpѕлеа tepmin ал пропорџiĭ 311,10 : 345^m,02 :: 100 : AD; de ѕnde AD = 110,90 а лѕа пе AP. Sъ тъсѕpъm пе BD, шi sъ sѕпѕnem ачеаstъ лѕnџime = 98^m,20: вom афла пе PM прin пропорџiea

100 : 98,20 :: 311,10 : PM = 305^m,50.

V.

63. Sъ mъsѕръm o înълцime de aл къpѕia пiчiop пe пѕtem aпpoпiia.

1° Kѕ гpafometpѕл.

Bom лѕa пe пъmînt, înчeпînd de лa пiчiopѕл лiнii вepтiкaлe чe aвem sъ mъsѕpъm SP (Fig. 59), o лѕнцime opiżoнtaлъ apвitpapiъ PK, шi вom mъsѕpa, dѕпe modѕл apъtat (36), ѕнгiѕл de înълцime *Sho*. În tpiѕнгiѕл dap dpeпtѕнгiѕ *Soh*, кѕпoaшtem ѕн ѕнгiѕ, afapъ de ѕнгiѕл dpeпt шi лatѕpa *oh*, чe пѕtem mъsѕpa. Aчeste eлemente sînt destѕлe кa sъ faчem пe xîptie aчest tpiѕнгiѕ pedѕs în miлimetpe пeнtpѕ metpe, кape нe вa faчe кѕнoskѕtъ înълцimea OS. Лa aчeasta вom adъoгa лѕнцimea OP, eкѕaлъ кѕ înълцimea instpѕmentѕлѕi. În eкsemплѕл пpesentat de fiгѕpъ, пiчiopѕл P aл лiнii вepтiкaлe чe aвem sъ mъsѕpъm нѕ este de aпpoпiiat imediat; însъ îл пѕtem sѕпѕнe de ast-feл, пeнtpѕ къ пѕtem mъsѕpa жѕmъtatea гpoѕimeї вasѕлѕї monѕmentѕлѕї.

2° Fъpъ гpafometpѕ. Sînt o mѕлцime de miжлoaчe пeнtpѕ кasѕл aчesta, afapъ de aл ѕmвpeї шi aл oглinzeї; dap daѕ пpea пѕцinъ пpeчisie în пpaкtiкъ кa sъ mepite a fi eкsпѕse aiчї.

VI.

64. A mъsѕpa o înълцime de aл къpiia пiчiop нѕ пe пѕtem aпpoпiia, sпpe eкsemплѕ înълцimea пepпeнdiкѕлapъ a ѕнѕї mѕнte.

Кa sъ împлinim aчeasta, aвem tpeвѕinцъ de гpafometpѕл.

Fie P (Fig. 58) пічіорꙋл перпеndікꙋлареĭ певъzꙋte SP, че tребꙋе sъ тъsꙋрът. Bom лꙋа în вале о лꙋпціте арбіtраріъ AB, ші вот тъsꙋра челе doъ ꙋпгюрї A, B че fак кꙋ ачеаstъ лініе разеле îndрепtate кътре вîрfꙋл S. Bom кꙋпоаште, în tрiꙋпгюл SAB, о латꙋръ ші doъ ꙋпгюрї, чееа че este de ажꙋns ка sъ'л fачет пе хîрtie ші sъ афлът латꙋра SB. În tрiꙋпгюл SPB, кꙋпоаштет ꙋп ꙋпгюꙋ dрепt în P ші іпоtепꙋsa SB: tребꙋе sъ афлът ꙋп ал doiлеа ꙋпгюꙋ. Sпре ачеаsta, вот шъsꙋра ꙋпгюл α, fорmat de латꙋра SB, ші раzа вizꙋалъ верtікалъ BH, datъ прin позiціеа instрꙋтепtꙋлꙋї. Aчest ꙋпгюꙋ este екꙋал, ка алtерп інtерп, кꙋ ꙋпгюл S ал tрiꙋпгюлꙋї SPB. Bom кꙋпоаште dар întр'ачеsta о латꙋръ ші toate ꙋпгюріле; îл вот репꙋрtа пе хîрtie, ші вот авеа în mілiтеtре în лок de метре прецꙋл лꙋї SP, ла каре вот adъогъ înълціmеа instрꙋтепtꙋлꙋї. Aчеаsta ва fi toatъ înълціmеа вîрfꙋлꙋї S, maĭ sꙋs de кît пътiпtꙋл пе каре se афлъ пічіоареле обsерваtорꙋлꙋї.

Tot întр'ачest кіп вот тъsꙋра înълціmеа ꙋпꙋї edifічiꙋ але кърꙋia temелiї пꙋ ле bedem, din прічiпа каselор, zidꙋрілор, saꙋ алte обstакле. Se înцелеце преа лesпе къ înълціmеа despре каре пе este ворба se sꙋпꙋпе а se îпчепе din пiво кꙋ обsерваtорꙋл.

АПЛІКАЦІЇ ЦЕОМЕТРІЧЕ.

I.

65. A îmпърці о dреаптъ datъ înтр'ꙋп пꙋтър оаре-каре de пърцї екꙋале, saꙋ în пърцї пропорціоапале кꙋ лiпiї date. (Fig. 60).

Fie DG o dpeanțъ datъ kape tpeбъe despъpцitъ în 5 пърцї ekвaле. Îї вom dъчe o паралелъ nexotъpîtъ AB, пe kape вom лъa 5 лъnцimї ekвaлe, шi de o тъpime apбitpapiъ AI, 1—2, 2—3, 3—4, 4—C. Пpin пъnktъpiлe A, C, шi estpemitъцiлe dpentei date, вom dъчe dpente kape съ se tae întp'ъn пъnkt S, de лa kape dъkînd лiniї лa челe 5 пъnktъpї de împъpцipe, вom aвea tot atîtea împъpцipї шi пe dpeanta DG, шi împъpцipiлe D*m*, *mn*, *no*, *op*, *p*G вop fi ekвaлe (*n*° 81).

Aчest mod este maї пpeфepaбiл, în пpaktikъ, de kît toate челe-лaлte întpeбъinцate спpe aчest skoп. Este komod de a dъчe паралелa nexotъpîtъ kъ ъn бastonaш, чeea чe ne aпъpъ de o konstpъkцie пaptikълapъ. Noї pekomandъm nъmaї ъpmъtoapeлe бъгъpї de seamъ: tpeбъe ka лiniea паралелъ dъsъ sъбt DG съ fie maї лъnгъ de kît DG, шi împъpцipiлe apбitpapiї съ fie atît de mapї, în kît AC съ kовîpmeaskъ kît de пъцin пe DG, ast-feл în kît ъnгiъл din S съ se aпpoпie de ъnгiъл dpent. Însъ, tpeбъe съ dъчem пpea бine difepiteлe лiniї, întemeind piглa пe пъnktъpiлe DG, шi съ însemnъm kъ вîpфъл бpiчeaгълъї atît вîpфъл S kît шi пъnktъpiлe de intepsekцie *m*, *n*, *o*, *p*.

De вa tpeбъi съ împъpцim dpeanta în пъpцї пpoпopцioнaлe kъ лiniї date, вom pamплasa пpintp'aчeste лiniї пъpцiлe ekвaлe aлe konstpъkцiї пpeчedente, шi tot kъ kiпъл aчeлa вom isпpъвi. Лiniea datъ se вa împъpцi пpoпopцioнaл.

66. Пe aчeastъ konstpъцie este întemeiat kiпъл de a dъчe пpintp'ъn пъnkt dat пe пъmînt o dpeantъ kape tpeчe пpin пъnktъл de întîлnipe a doъ dpente, aчest пъnkt fiind nъ nъmaї neaпpoпiiat, чi înkъ ne-

въzѕt. Fie, tot întр'ачеаstъ fiгѕpъ, челе dоъ dpenте копверџепте AS, BS, ші n пѕпкtѕл пріп каре tpeбѕе sъ dѕчеm dpeaпta черѕtъ. Dака пѕпкtѕл S ар fi fost пѕmaĭ пеапропіiat, ар fi fost de ажѕпs грafometpѕл. De este певъzѕt, вom dѕче o tpaпsвepsалъ оаре-каре AB; dѕпе ачеаsta, пріп пѕпкtѕл dat m, о паралелъ mGH лѕĭ AB. Вom împъpці пе чеа din ѕрmъ în dоъ пърці каре sъ se аївъ întpe еле : : Gm : mH. Пріп пѕпкtѕл 2 ast-feл detepminat ші пѕпкtѕл m вom dѕче dpeaпta черѕtъ. Este лесne de demonstpat къ еа ва tpeче пріп пѕпкtѕл S.

II ші III.

67. **Аfъsi о а патра пропорціоналъ ла tpeĭ dpeпte date; ші пе о dpéaптъ datъ, sъ fачеm ѕп полігоn asemeпеа кѕ ѕп полігоn dat.**

Ачеste dоъ проблеmе, din каре чеа d'întîĭ sлѕжеште de бas челеĭ d'ал doiлеа, аѕ fost pesoлѕte (Теор. 94 97). Чеа din ѕрmъ пpеа des se întpeбѕinцеаzъ; ші sлѕжеште ла копіеаtѕл desemпелор џеоmetpiче, ші sпре але pedѕче ла пропорціеа черѕtъ. Sпре ачеаsta, deskomпѕпеm în tpiѕпгіѕpĭ desemпѕл dat, ші черереа ажѕпџе а fаче tpiѕпге asemenеа кѕ tpiѕпгіѕpĭ date, лѕînd de бas de плекаре о лiпie datъ ка омолоагъ кѕ оаре-каре латѕръ а полігопѕлѕĭ dat, saѕ mаĭ біпе къѕtînd ачеаstъ лiпie dѕпе skaлa de pedѕкціе. Nѕ intpъm în amъpѕпtеле ачеstopa, пептpѕ къ sînt, sпре а fаче fiгѕpĭ asemenеа, modѕpĭ пpеа пpеfеpабiле sѕбt paпортѕл skѕpцъpiĭ ші ал eksaktitъцĭ. Noĭ вom esпѕпе пе челе

dоъ шаї прiнчiпале; insъ рекоmandъm пе чеа d'ал doiлеа maї mълt de кit пе toate челе-лалte.

IV.

68. А копiia ѕп desemn џеоmetpiк dat.

Методѕл коордонателор поларе.

Вom inкide intiiŭ desemnѕл че tребѕе sъ копiem, intp'ѕп кadpѕ ABCD, de нѕ este inкis, шi вom imпърџi латѕреле кadpѕлѕї in пърџї екѕале, кit se ва пѕtea de miчї, пе каре ле вom нѕmepoia кѕ бъгаре de seamъ. Dѕпе ачеаsta, вom tpaџе пе хiptiea че tребѕе sъ прiimeaskъ копiea ѕп кadpѕ екѕал A″ B″ C″ D″, daка копiea tребѕе sъ fie екѕалъ кѕ opiџiналѕл, шi 'л imпърџiш ка пе чел-лалt. Ка sъ копiem ѕп пѕнкt оаре-каре b″, прекѕm se afлъ ашъzat in opiџiнал in b, вom пѕне о рiглъ пе пѕнкtѕл A ал modeлѕлѕї; шi ачеаstъ рiглъ, tрекind прiн пѕнкtѕл b, ва intiлнi кadpѕл intp'ѕп пѕнкt оаре-каре че вom insemna, шi intp'ачеeашї време вom mъsѕра кѕ кomпаsѕл, saŭ maї бiне кѕ dѕблѕл-dечimetpѕ, лѕнџimea Ab. Тpaнsпортind рiгла пе копie in A″, о вom indpenta sъ tpeaкъ прintp'ѕп пѕнкt ал кadpѕлѕї аналог кѕ чел че а intiлнit in кadpѕ modeлѕлѕї; dѕпе ачеаsta, лѕind пе ачеаstъ dpeaптъ A″b, о лѕнџime A″b″ = Ab, вom авеа in b″ репpesentaџiea пѕнкtѕлѕї b. Ast-fел вom ѕрша кѕ toate пѕнкtѕpiле че tребѕе sъ tpaнsпортъm пе копie.

Este бiне sъ dѕчem in лѕнгѕл рiглеї ла deoseбiteле позiџiї лiniї кѕ креionѕл, saŭ чел пѕџin пърџї de лiniї каре sъ tae mърџiniле кadpѕлѕї, ка sъ нѕ не indoim de позiџiea пѕнкtѕpiлор de intiлнiре. Atit

ачeste лiniĭ кît шi кadpьл ажьtъtop, кape tpeбye шi eл sъ fie tpas кь плyтб, se вop штepџe dьпe onepaџie. Кътpe aчestea, віne ap fi sъ ne slьжim кь dьбльл deчimetpь кa piглъ, de se ва пьtea: distanџeлe Ab se чitesк îndatъ пe aчeastъ piглъ, шi în datъ se шi însemneazъ кьm se ва пьne piглa пe копie.

Este лesne a кьноаште, întp'aчeastъ konstpькџie, ьn adeвъpat калк: îл пьmesк metodьл koopdonateлop поларe, пentpь къ o dpeaптъ oape-кape Ab se sokoteштe întopкîndь-se îmпpeжьpьл чentpьльĭ A, шi tpeкînd tpeптat пpin toate пьнкtьpiлe a, b, c, d... кь toate къ пъpџiлe eкьaлe însemnate пe кadpь пь кopesпьnd кь ьnгюpĭ eкьaлe, кînd sînt конpinse de doъ пosiџiĭ sькчesiвe aлe dpeптeĭ moбiлe. Кь toate aчestea, ьnгюpiлe чe лe faчe sькчesiв aчeastъ dpeaптъ кь basьл кadpьльĭ sînt înвedepat eкьaлe, în opiџinaл шi în копie, пentpь къ џin de tpiьnгюpĭ dpeптьnгe кapе aŭ doъ лatьpe eкьaлe ьna алteia. Este dap de пpisos a tpaџe înъьntpьл fiгьpeĭ ьn кapt de чipконfepinџъ шi a'л îmпъpџi în пъpџĭ eкьaлe, пpeкьm oбiчпьesк sъ faкъ. Îmпъpџipea кadpьльĭ este пpea лesne, шi întpeбьinџapea este maĭ tot aшa de лesne.

Se вede însъ къ metodьл koopdonateлop поларe нь se поate апліка de кît пьmaĭ лa konstpькџiea копiiлop eкьaлe în mъpime кь modeльл. Noĭ вom пpoпьne o modifiкaџie кape, desnatьpîndь-'л în adeвъp, îл faчe maĭ aшa de лesne лa întpeбьinџape, шi înкъ, ажьtъ лa pedьчepea fiгьpeлop întp'ьn papopt oape-кape. Dьпъ чe вom dьчe în льнгьл piглeĭ кapе tpeчe пpin пьнкtьpiлe A, b o лinie кь кpeion Aб, вom пьne piглa пe Bb, шi вom dьчe o aл doiлea лinie кь кpeion, кapе ва tъia пe чea d'întîiŭ în b шi

кadрул апроапе de пункtул 2. Bom faче пе кadрул копіеї tot o ast-feл de konstрукціе, пуind рiгла сукчesiв пе A″6 ші пе B″2; челе доъ dрепte tрase ку креion se вор tъia întр'ун пункt *b*″, каре ва fi репресентаціеа пункtулуї *b*.

De am вoi съ faчem o копіе редусъ але кърia dimensiї съ fie, спре ексемплу, пе жумътatea dimensiiлор modeлулуї, вom faче ун кadру A′B′C′D′ але кърuia латуре съ fie пе жумътatea латурелор modeлулуї, ші ле вom îмпърці tot întр'atîtea пърці екуале, каре вор fi пе жумътate de miчї. Дукînd în кadрул чел mik dрепte каре вор tрече tot прin ачеле пункtурї A6, B2, вom авеа o intерсекціе каре ва fi репресентаціеа пункtулуї *b*. Aiчї авem tрiунгiуріле asemenea, A*b*B, A*b*′B′.

Aчest ноу metod este аналог ку întребуінцареа планшеteї (веzї *n*° 74); ел este преа iute ші лesniчios, пентру къ îмпърціреа латурелор кadрулуї în пърці екуале ажунце a întребуінца дублул-dечimetру, ші a însemna din жумътate în жумътate чentimetру. Noї кредem къ не ва ажута мулт de вom dуче лiniї ку креionул din пункtул A ла toate пункtуріле îмпърціріі кadрулуї; de вom урma asemenea ку пункtул B, tot спаціул ва fi deспърціt în miчї патрулатуре de мъріme ші de fiгуръ варiабiлъ, în каре вom пуне пункtуріле че sînt a se însemna пе копіе прекум sînt în modeл. Aчeastъ sistemъ intръ în чea урmъtoаре, каре suбt toate рапорtуріле ії este maї преfераbiлъ.

Metodул патрателор.

69. Înкidem întр'ун кadру ка maї sus desemnул че авem съ копiem, ші îмпърціm tot ку кiпул аче-

ла ачest кadpв în пърцî еквале; dвпе ачеasta dвчem прin пвнкtвpiле de îmпърцipe atîtea лiнiî кв кpeioнвл, параделе кв лаtвреле кadpвлвî. Modeлвл se împarte în natpate, ка о tаблъ а лвî Пitагора; ле пвтърotъm кв кpeioнвл (Fig. 62).

Dвпе ачеasta, de boim съ fачem о fiгвpъ pedвсъ, пе жвmъtate de miкъ, спре eксemплв, bom fаче пе foaea de копiat вн кadpв asemenea, пе dimensiî пе жвmъtate, шi ле bom împърцi iаръшî întp'atîtea пърцî еквале în кîte а fost кadpвл modeлвлвî. Dвкînd параделе, bom аbеа tot atîtea пъtpate пе каре ле bom пвmepota ка шi пе челе-лалte. De ne слвжim кв dвблвл-dечimetpв, este преа лesne съ împърцim кadpвл чел miк întp'atîtea пърцî еквале în кîte este шi чел mape, пentpв къ, dака ла чел mape am însemnat, din чentimetpв în чentimetpв, ла чел miк пвtem însemna din жвmъtate în жвmъtate чentimetpв. De bom boi съ pedвчem ла а tpeia, bom fаче întîiв кadpвл чел miк пе каре îл bom împърцi din 3 în 3 miлimetpe, шi dвпе ачеasta bom însemna пе чел mape din 9 în 9 miлimetpe. Se înцелеце че tpeбве съ fачem кînd sкала de pedвкцie ap fi fost алtа. Съ se începъ алt парагpaf.

Aквm, нв ръmîne алt de кît съ ашezъm fie-каре пвнкt din modeл în пъtpatвл копiî каре поартъ ачелашî нвmър кв пъtpatвл че кonpinde ачest пвнкt în opiцiнал, шi а'л ашъzа asemenea, лвкpв преа леste, dака natpateле sînt miчî. Estpemitъцiле лiнiiлop dpente fiind ast-feл papoptate, не ва ръmînea нвmaî съ ле вnim, шi аша tot лвкpв se ва pedвче нвmaî ла ачеаsta, кînd fiгвpa este кomпвсъ нвmaî de пърцî dpentлiniate. Ка съ papopтъm лiniiле кврбе, преквm si-

пѕоsiтъціле латѕрелор, але гірлелор, але дрѕмѕрілор, ле вом deskompѕne în пърці din пътрат în пътрат, аръtînd пе латѕреле ачеstора челе доъ пѕнктѕрі ѕnde кѕрба ле tae ка съ intpe saѕ съ easъ din nатрате, ші аша ажѕнцем а траце нѕмаї ніште аркѕрі мічі маї ректіліне коnpinse în fie-каре патрат.

Пропорціоналітатеа діверселор пърці але челор доъ fігѕрі есте преа înbedepatъ, дѕпе ачеастъ констрѕкціе, ші нѕ не маї пѕтем îndoi. Este лесне а înцелеце че требѕе съ фачем ка съ skoatem о копіе пе dimensii маї марі de кît але оріціналѕлѕї, saѕ съ se аїбъ кѕ ачесtea întр'ѕn рапорт фракціонар оаре-каре.

Ачест метод, маї сѕперіор de кît тоате челелалте пентрѕ simплічітатеа ші eksaktitatea sa, есте преа пропріѕ а фаче копії de харте цеометріче. Ел se întребѕінцеазъ asemenea ла фачереа плапѕрілор de zidipї, мошії, пеіsaцієрі ші înкъ ші ла таблоѕрі de istopie. Se штie, къ ка съ skoaцъ о копіе, артістії deспарт моделѕріле лор în пътрате, прін fіре întinse; ast-fел аѕ копііат, дѕпе болта салеї темплѕлѕї лѕї Dendepax, планіsферѕл еціntian каре s'а транспортат дѕпе ачеаста în бібліотека регалъ. Ѕнії desemnatopї se слѕжеsk, ка съ рідіче пеіsaцієрі, кѕ ѕn mod аналог: еї пѕн înainte-ле о черчевеа кѕ патрате, прін каре se ѕітъ ла кîмп, ші рапоартъ пе хîртіеа че о аре îмпърцітъ asemenea în патрате, діферітеле пѕнктѕрі че аѕ обсерват în патрателе кореспѕнзътоаре din черчевеа.

ПРЕЧІЅЇ DE РІDІКАРЕА ПЛАNЅРІЛОР.

70. А pidiка планѕл ѕnѕї лок, ва sъ ziкъ а'ї тъѕѕра toate пърціле ші а ле рапорtа пе xiptie, astфел în кіt sъресѕлtе о fiгѕръ asemenea кѕ чеа de пе фаца пъmintѕлѕї. Difеріtеле обіекtе saiлаntе пе sѕпрафаца ачеstѕї лок sѕпѕindѕ-se ѕnite кіtе tpeї tpeї, прin лiniї dpente, ва ресѕлtа о adѕnape de tpiѕnгюрї; ачеstea, fiгѕpate пе xiptie прin tpiѕnгюрї asemenea, вор înфъціша поptpetѕл sѕпрафецiї desкомпѕse.

Diвеpsеле пърцї але локѕрілор кърора ле pidiкъm планѕл sînt преа рар de nіво. Кѕ toate ачеstea ле sѕпѕnem ка ашezate întр'ѕn ачелашї план opizontaл; ші de ачееа desemnѕл este fiгѕpa formatъ de проiекціiле лор пе ачеst план opizontaл, пе каре ле пѕtem sѕпѕne ка ашezate întр'о оаpeкаре înълціме, dар пе каре ле вом sѕпѕne tot d'аѕnа къ tpeк прin пѕnкtѕл чел maї de жos ал локѕлѕї.

Кѕ toate ачеstea nѕ'шї ва пѕtea фаче чinева о idee коmплекtъ de sѕпрафаца локѕлѕї, dака nѕ вом алъtѕра ла планѕл проіекціiлор, проfiлѕл sѕпрафецiї sѕпѕse ка tъiatъ de планѕрї веptiкале dѕse прin dipeкціiле челе maї nепотpiвite. Вом da titлѕл de nівiлацiе, кѕm tpeбѕе sъ tpaцem ачеste проfiле.

Noї sѕпѕnem къ локѕpiле, saѕ în ценерал sѕпрафецеле кърора ле pidiкъm планѕл, sînt преа mічї, неешind adiкъ dintр'ѕn черк каре sъ аiбъ de ѕn mілimetpѕ раzа ($2\frac{1}{2}$ мiлѕpї) чел mѕлt. Репpesenтаціiле maї mapї de кіt ачеstea iaѕ nѕmеле de xapte

топографиче. Харtеле челе марї топографиче se нѕmesк харtе џеографиче. Фачереа ачесtор фелѕрї de харtе чере чева прінчіпе маї мѕлtе de кît simпла рідікаре de планѕрї.

Рідікареа планѕрілор se desпарte în доъ пърцї. Noї вом tракtа întîiѕ despре рідікареа планѕлѕї кѕ instрѕmente: ачесtа este кінѕл чел маї ексакt шi чел маї sкѕрt. Dѕпе ачеаsta вом аръta міжлоачеле de а ажѕнџе ла ачеаsta фъръ instрѕmente. De шi ачесt metod este маї лѕнг шi маї ostenitор, simплitatea шi indeпendinца sа îл фаче прецѕit шi преа întреввінцаt.

ПАРТЕА I.

Рідікареа планѕлѕї кѕ instрѕmente.

§ 1. РІDІКАРЕА ѸNѸЇ ЛОК NЕАКЧЕSІБІЛ.

1° Кѕ графометрѕл.

71. Fie (Fig. 63) локѕл ал кърѕіа план тревѕе съ'л рідікъм. De нѕ este înкis întр'о îмпрежмѕіре преа însemnatъ, тревѕе съ 'л чіркоnsкрім прін лінії жалонаte, шi съ dъм ачестеї îмпрежмѕірї кît se ва пѕtea форма ѕнѕї dрепtѕнгіѕ.

Dѕпе ачеаsta не вом преѕмбла пеste tot локѕл, шi вом фаче din окї, пе хîрtie, о репресенtаціе а ачесtѕї лок че se нѕмеште кроні, каре slѕжеште

a fiksa ideiле ші a прііmi цiфреле diferiteлор пърцї тъsѕрate пе пъmînt. Dѕпе ачеаsta вom къѕta doъ пѕпktѕpї kît se ва пѕtea maї depaрte ѕпѕл de алtѕл, а кърор депърtаре s'o пѕtem тъsѕра кѕ înлesnipe, ші de ла каре sъ пѕtem вedea челе maї mѕлte oбiekte, че требѕе sъ репрезentъm. Fie A ші B челе doъ пѕпktѕpї; вom тъsѕра distanцa AB. Ка sъ пѕ не întреръпem кѕрsѕл, вom da maї depaрte instрѕкцiiле печеsарiї sпре a faче ачеаstъ тъsѕрътоаре кѕ ексаktitate.

Dѕпе ачеаsta вom пѕпе графometрѕл în пѕпktѕл A, ші îndрептînd лiniea de кредinцъ пе AB, вom вiza sѕкчеsiв, кѕ алidada, toate пѕпktѕpiле însemnate че se пot desemna, прекѕm *m*, *d*, *c*, *r*, *z*, *y*, *x*, *k*, *b*, ші вom чiti пе instрѕment ѕпгюрiле че diверsеле разе вiзѕале fак кѕ басѕл AB. Вom însemna пе крокi прецѕрiле ачестор ѕпгюрї, dѕпе ачеаsta вom stръmѕta instрѕmentѕл în B; вom вiza din поѕ ачелеашї пѕпktѕpї, ші вom însemna пе крокi прецѕрiле ѕпгюрiлор че fак кѕ басѕл повеле разе вiзѕале. Sъ sѕпѕпem къ am вizat ast-fел toate пѕпktѕpiле însemnate але локѕлѕї, копрinzîndѕ-se întре ачестеа ші estремiтъцiле zidѕрiлор, гардѕрiлор, шанцѕрiлор каре хотъръsk лiniiле dрепte, ші estремiтъцiле diверsелор пърцї în каре se deskomпѕп лiniiле кѕрбе, прекѕm dрѕmѕрiле, pîѕрiле, ка sъ fачеm din еле лiniї dрепte, вom авеа tot kît требѕе sпре a съвîрші пе хîрtie репрезentaцiea локѕлѕї.

Sпре ачеаsta, вom хотърî întîiѕ o skалъ, адiкъ вom хотърî o лѕпцiме dѕпе вое ка sъ репрезentezе o лiнie datъ пе пъmînt. Skaла este de o kompoziцie кѕ totѕл dѕпе вое, însъ sѕбордonatъ ра-

порtѕрілор че se aflъ întpe dimensiiле локѕлѕї шi ачелеа але foi de xîptie. Însъ fopma чеа maї комodъ este a лѕа miлimetpѕл ка sъ пепpesenteze ѕnѕ, doъ, tpeї metpe, saѕ̆ o жѕmъtate, o a tpeia, ѕn sfept de metpѕ; шi atѕnчї не ажѕtъ mѕлt dѕблѕлdeчimetpѕ, але кърѕia mічеле împъpцipї daѕ̆ o skaлъ fъкѕtъ шi лesne de întpeвѕinцat не xîptie. Noї de акѕm înainte, ка sъ statopnічim ideiле, вom sѕnѕne къ miлimetpѕл пепpesentъ doъ metpe. Вom ziче, întp'ачest kaz, къ планѕл se ape кътpe skaлъ ка $\frac{1}{2000}$.

Вom tpaцe не xîptie o лinie, не каpe o вom faче de atîtea miлimetpe de лѕngъ de kîte opї 2 metpe se вop копpinde în лѕnцimea AB. Fie ачeastъ distanцъ de $327^m,15$; вom лѕа не xîptie $\frac{327,15}{2}$ saѕ̆ $163^{miл.},575$, saѕ̆ în sfîpшit че-ва maї mѕлt de kît 163 miлimetpe шi жѕmъtate; ачeasta ва fi пепpesentaцiea лiniеї AB. Dѕпе ачeasta, fъkînd sѕкчesiв în пѕnktѕpiле че пепpesentъ не A шi B ѕnгюpї екѕале кѕ челе че am mъsѕpat акоʌо не пъmînt, intepsекцiiле лatѕpeлop вop da пѕnktѕpiле каpe вop fi пепpesentaцiea diвepseлop пѕnktѕpї oвsepвate. În adeвъp, вom авеа tpiѕnгюpї asemenea кѕ челе de не faцa пъmîntѕлѕї, пentpѕ къ вop авеа, din konstpѕкцie, doъ, шi пpin ѕpmape tpeї ѕnгюpї екѕале ѕnѕл aлtѕia. Лatѕpeле omoлoaцe fiind пpoпopцionaле, ѕpmeazъ dintp'ачeasta къ difepiteле пѕnktѕpї de intepsекцie вop fi не xîptie, în papopt кѕ челе че пепpesentъ A шi B, în distanцe каpe, лѕate не ѕn miлimetpѕ dpent doъ metpe, вop fi екѕале кѕ adeвъpateле distanцe kopesпѕnzъtoape не пъmînt. Dака

планѕл че рidікъm nѕ este sъ se maї копіеzе, чееа че se întîmплъ преа рар, вот dѕче кѕ креіоn латѕреле ѕnгюрілор, шi ле вот штерџе dѕпе че вот însемna кѕ чернеалъ dіверsеле пѕнкtѕрї de intерsекџіе.

72. Ла ачеаsta se редѕче рidікареа планѕлѕї кѕ граfomеtрѕл. Însъ кѕ ачеste simпле ноџіѕнї, поаtе къ nѕ ва fi чіnева în stаре de а лѕкра пе пъmint. Кѕ toate къ noї dъm aiчї nѕmaї ѕn пречіs ал арtеї, шi îndemnъm пе чititорї а алерга ла tрактаtѕрї maї комплекте, noї însъ вом adъогъ ла ачеste прінчіпе atîtea desлѕшірї în кît ачеst пречіs sъ поаtъ sлѕжі ла рidікареа ѕnѕї план de о mъріmе de mizлок, шi каре nѕ ва авеа чева греѕtъџї партікѕларе.

1° Noї am sѕпѕs къ пѕtem віza de ла estремitъџіле basѕлѕї AB, toate обіектеле de репреsentat; dар în џенерал nѕ пѕtem вedea din estремitъџіле basѕлѕї toate ачеste обіекте. Atѕnчї tребѕе sъ fачем mѕлте stаџiї, лѕînd ѕнеле din лiniiле detерminate de noѕе basѕрї, шi обsервînd din estремitъџіле лор пѕнкtѕріле че nѕ se въd din stаџiiле A шi B. Шi аша, dака din пѕнкtѕл B, nѕ пѕtem вedea пѕнкtѕл d, din прічіna вре-ѕнеї клъdірї dintре еле, îл вом detерmina лѕînd лiniea AC пентрѕ basѕл ѕнѕї tріѕнгю кърѕіа ел îї ва fi вîрfѕл. Basѕл ажѕtъtор BC а sлѕжit spре detерminареа пѕнкtѕлѕї n; basѕл nd, а detерminat пѕнкtѕл φ.

2° Dака лiniea AB, basѕл tѕtѕлор лѕкръріlор, nѕ ва fi mъsѕраtъ кѕ eksaktitate, dар ѕnгюріле вор fi mъsѕраtе кѕ о destѕлъ пречіsie, este лesne de а кѕноаште къ планѕл ва fi ор кît о imаџінъ eksaktъ а локѕлѕї; nѕmaї toate dimensiiле вор fi mікшораtе

saŭ тъpite în paportsл лsnцimeĭ чeĭ adeвъpate a вasѕлsĭ кs тъsspa sa чea гpeшitъ. Dap, de sîntem siлiцĭ a лsa dpent nooe вasspĭ sneлe din лiniiлe de maĭ 'nainte determinate кs гpeшaлъ, este лesne de înцeлes къ dintp'aчeasta ap pesѕлta negpeшit гpeшълĭ лa sнгisрĭ, шi npin spmape sn xaos de neeksaktitъцĭ. De aчi spшeazъ къ tpeбse тъsspatъ кs mape npeчisie лiniea AB, вasѕл tstsлop лsкpъpiлop.

Шi înкъ, tpeбse кa aчest вas sъ ns fie npea mik în papopt кs dimensiiлe лoкsлsĭ. Daкa eл вa fi maĭ mik de kît $\frac{1}{8}$ чeлop maĭ mapĭ dimensiĭ, sнгisрiлe fopmate ne xîptie вop fi npea askѕцite saŭ npea teшite; intepsekцiiлe лiniiлop ns se вop desemna лътspit, шi вop spma гpeшeлĭ лa posiцiĭ.

3° Des se întîmплъ sъ тъsspъm sнгisрĭ de aлe къpopa вîpfspĭ ns ne nstem anponiia. Întp'aчest kaz, лsînd doъ nsnktspĭ A шi B (Fig. 52), ne лatspeлe aчestsĭ sнгisŭ, вom тъsspa sнгisрiлe TAB TBA; skъzînd ssma лop din 180°, вom aвea sнгisл neanponiiaбiл I.

Maĭ tot d'asna вîpfspiлe sнгisрiлop sînt neanponiiaбiлe, nentps къ aчeste вîpfspĭ fiind лsate ne oбiekte de oape-кape вoлsшin, ns nstem nsne aкoлo гpafometpsл. Noĭ am desлsшit aчeastъ гpestate (n° 24).

4° Este npea tpeбsinчios a nъzi чea maĭ вsnъpîndsiaлъ лa determinaцiea nsnktspiлop кanaвasълsĭ; шi кa sъ ne anъpъm de o konfssie, tpeбse sъ nsnem лa fie-кape nsnkt de вizat sn mъiag nsmepotat, шi sъ penetъm aчest nsmъp ne xîptie, în nsnktsл чe fiгspъ ne oбiektsл кs mъiag. Foлossл aчesteĭ npeкosiĭ este înвedepat; ea este neanъpat tpeбsin-

чіoasъ maĭ вірtos пentpȣ estpeшitъцiле пърцiлор în каре se deskomпȣп кȣрвеле, прекȣm гîрлеле, dpȣшȣ-piле шi алтеле.

A desea se întîmплъ ка пȣпktȣpiле însemnate але локȣлȣĭ, прекȣm ȣпгюрĭ de zidȣрĭ, съ se askȣпzъ de oape-каре oвiekte, прекȣm пъdȣрĭ, клъdipĭ, шi алтеле. Atȣпчĭ ле facem възȣte pidiкînd d'asȣпpa лор mъеце вертiкале але кърора вîрfȣрĭ поартъ кîte ȣп sewп, прекȣm ȣп stегȣлец, каре stъ maĭ sȣs de staвiла че опреа веdереа. Nȣ se întîmплъ нiчĭ o datъ ка aчeste пȣпktȣрĭ съ fie atît de înалте în кît съ пȣ se вазъ прin ferestpeле пiнȣлелор saȣ лȣпetеле плопжante. Întp'aчest fел de каz преа pap, вom întinde înaintea чentpȣлȣĭ oвiektiвȣлȣĭ лȣпeteĭ ȣп fip кȣ плȣmв, ал кърȣia пȣпkt de atîpпape съ 'л пȣtem pidiкa atît în кît съ акопере пȣпktȣpiле чеде maĭ înалте але edificiȣpiлор шi але deaлȣpiлор. Posiцiea aлidadeĭ, în aчest каz, ва fi aчеea че se кȣвiне ла проiekцiea aчestop пȣпktȣpĭ, шi вom чiti ȣпгюл кътat.

5° Градȣл de eksaktitate кȣ каре тревȣе съ чitim ȣпгюрiле, depinde de ла mъpimea skaлeĭ de mъsȣpъ, шi поate fi determinatъ de пе dînsa. În adевър, diferiнца a doъ ȣпгюрĭ че вор da, латȣpeĭ опȣse че еле determinъ, o diferiнцъ неапpesiaвiлъ пе хîртie, se поate sokoti nimiк, шi fikseazъ градȣл пречiсiї în чitit. În ipotesȣл nostpȣ, ȣnde ȣп sfept de miлimetpȣ, кîтъцime че se поate тpeче кȣ веdереа пе хîртie, pепpesentъ o жȣmъtate de metpȣ de пе пъmînt, nȣ вom цiне în seamъ fракцiea ȣпгюларъ че ар авеа în чеа maĭ mape dimensie a локȣлȣĭ o inflȣinцъ чел mȣлт de o жȣmъtate de

stînжin. Eatъ кsm вom determina aчest panopt. Вom îndpenta alidada пе sna din mъpцiniле sнsĭ oбiекt чe se aflъ пpea depapte, шi a кърsia лъpцiме o пstem sъnsne кsnoskstъ, пе sn кonaчĭs spre eкsemплs, шi вom чiti aрътаpea alidadeĭ пînъ aпpoane de sn minst. Dsпe aчeasta вom îndpenta alidada пе mapцinea опsсъ a кonaчĭsлsĭ, шi вom konssлta iapъшĭ înstpsmentsл. Daкa diferinцa челор doъ sнгĭspĭ ва fi maĭ mapе de sn minst, grosimea кonaчĭsлsĭ fiind апpoane de o жsmъtate de metps, se вede къ пstem negliжa sn minst ла чititsл sнгĭspiлop. Tot кs кinsл aчesta не вom înкpedinцa къ, ла плansрiле челе miчĭ, este destsл sъ чitim апpoaпе de чinчĭ minste.

6° Este вine sъ вepifiкъm, dsпe mъssрapea tstsлop sнгĭspiлop, daкa n'am fъкst вpe-o грешалъ ла чitit. Spre aчeasta, tpeвse sъ mъssръm sнгĭspiле чe fak între еле diвepseле paze вizsaле, în лок de a mъssрa, кsm am fъкst ла înчenst, sнгĭsл fieкърsia dintre еле кs вassл. Kompapaцiea tpeвsia sъ не kondsкъ ла pessлtate identiчe; шi înкъ, ap tpeвsi sъ гъsim, пpin aчest nos mod, къ ssma tstsлop sнгĭspiлop dinпpeжspsл sнsĭ пsnкt este de 360°. În кît пentps mъssрa вassлsĭ, a кърsia eкsaкtitate este înкъ maĭ impoptantъ, o вom вepifiкa пpin o a doa mъssръtoape. Daкa вepifiкapea dъ sn pessлtat пpea пsцin deosевit de чeл d'întîĭs, вom лsa o miжлочie, кape se вa soкoti кa adeвъpatъ.

7° În sfîpшit, ns se oвiчnseшte a se pidiкa кs grafometpsл toate пsnкtspiле локsлsĭ чe tpeвse sъ figspeze пe плan. Amъpsnteле se pidiкъ пpin miжлoaчe maĭ înлesniчioase, пpeкsm, плanшeta шi вs-

ѕола. Dѕпе че вот рidіка о datъ пѕпкtѕріле прінчіпале, totалѕл лор іл пѕtem îmпърці în кîtе–ва каdре пѕ преа marî, în interiорѕл кърора вот ѕъвîрші лѕкрърі аналоаце аѕѕпра обіектелор sekondape. Аша лѕкрѕл терце maî ѩte, ші se поаte desпърці între maî тѕлці лѕкрътоpî; noî вот ѕрma apъtînd metoadеле кѕ каре пѕtem ажѕнце ла ачеаsta.

2° Рідікареа планѕлѕї кѕ бѕsола.

73. Noї am esпѕs ла aptiколѕл despre тъѕѕра ѕнгіѩрілор, кѕm бѕsола поate sлѕжі ла ачеаsta. Аша dap еа поаte, întp'ѕn план mік, sъ pemплаseze графоmetpѕл, ші sъ se întpeбѕinцeze tot dѕпе ачелеаші прінчіпе. Кѕ toate ачеstea întpeбѕinцapea sa, întp'ачеst paпорt, este преа mърціnitъ; оаmeniї пpefepez планшеta. Însъ se sлѕжеѕк кѕ dînsa maî кѕ dinadinsѕл пentpѕ determinapea кѕрsѕлѕї ѕнеї лiniї кѕ sinѕоsitъці, пе каре о îmпарte în пърці maî dpente, прін шъіеце пѕцin depъrtate ѕнѕл de алtѕл, каре о префаче întp'o лінie sfъpîmatъ. Pъmîne sъ determinъm ѕнгіѩріле fpîntѕреї ші лѕнцimеле ачеstop пърці.

Sпре ачеаsta, dѕпе че вот пѕне шъіеце din distanцъ în distanцъ (Fig. 63), ші maî вiptos în котѕріле s, t, u, ω, тъѕѕpъm пе st ші ѕнгіѩл uts; dѕпе ачеаsta латѕра tu ші ѕнгіѩл $tu\omega$, латѕра $u\omega$ ші ѕнгіѩл $u\omega f$, шчл. Se înцелеце къ, dака авеm пе хîptie dipeкціеа челеї d'întîiѩ лiniї st, пѕtem tpaце лiniеа sfъpîmatъ $stu\omega f$, фъкînd ѕнгіѩрі екѕале ші латѕре пропорціонале кѕ челе тъѕѕpate. Dѕпе ачеаsta вот pemплаsа пърціле лiniї sfъpîmate прін лiniї

пуцin sinуoase între кърора локурї sînt еле, шi каре se пot desemna din ведере.

În кît пentpу dipekцiea луї *st*, еа se ва da de вусолъ, тъsурînd унгюл че fаче ачеаstъ dpeaптъ ку алtа че о авет пе план. În sfîрmit se служеsk ку вусола ка sъ opienteze пе ачеsta. Обічнуеsk a înкide desemнеле într'ун кadpу dpeпtунгюлар, але кърyia латуре sъ касte ла челе патрy пунtурї кар-dinале, нopdул fiind sуs, sудул жоs, esтул шi веstул ла dpeaпta шi ла stînга. Ка sъ fоpтът кadpул de opientaцie, вот віза ку вусола доъ пунктурї че авет пе план, шi вот ведеа че унгю лініеа че ле уне-ште fаче ку акул тагнitat. Обsервînd къ ел fаче în цeneрал, ку лініеа нopd-sуd, ун оаре-каре унгю de деклінацie, шi котпарînd унгюл тъsурat ку deкліnaцiea акулуї, пentpу локул унde se fаче об-sepвaцiea, вот авеа унгюл че 'л fаче ку лініеа нopd-sуd ачееа че ноï ат візаt пе пътînt. Аша dap de вот fаче пе ачеаstъ din уртъ ун унгю екуал ку чел че ат determinat, a dоа латуръ a ачеstуї унгю ва fi лініеа нopd-sуd. Atît не este destул ка sъ fачет кadpул opientaл.

3° Pidiкареа планулуї ку планшета.

74. Нутеsk планшетъ (Fig. 64) о sкîndуръ пъ-tpatъ преа віне унitъ, de 40 пînъ ла 50 чentimetpe în латуръ, пуptatъ пе ун пічіор ка ал графотеtpу-луї, чееа че fаче о тешчіоаръ аsупра кърiia ліпеsk о foae de xîptie пе каре sînt пуse пунктуріле прін-чіпале але локулуї. О алidadъ saў рігль de арать D, ку пінуле преа înалtе, sînt нечеsapiiле.

Ка съ не слѫжim кѫ ачеstea, вom пѫне планшеta ïn estpemitatea A a ѫнеї лinії AB de пе пъmînt, каре este pепpesentatъ пе хîptie прin *ab*. Вom пѫне алidada пе *ab*, шi вom înвîpti планшеta пе вълѫгѫл съѫ пînъ кînd вoш zъpi прin пiнѫле пѫнкtѫл B; atѫнчї алidada шi лiniea *ab* sînt пе dipекціеа AB. Înцепепim планшеta întp'ачеасъ посiціe.

Dѫпе ачеasta, вoш înвîpti алidada împpeжѫpѫл пѫнкtѫлѫї *a*, вizînd ла diвepseле обiекte G, M, C, че tpeбѫe съ pепpesentъm. Op de кîte opї вoш îndpeпta алidada кътpe ѫнѫл din ачеste обiекte, кътpe M, спpe ексemплѫ, вoш tpaце пе хîptie, în лѫнгѫл алidadeї, о лiniе кѫ кpeioнѫл; шi аша вom авеа atîtea лiнiї tpeкînd прin пѫнкtѫл *a* кîte обiекte sînt de pепpesentat.

Dѫпе ачеasta вoш stpъmѫta планшeta în B, шi о вoш ашъza iаръшї пе dipекціеа AB, апої вoш вiza din ноѫ ачелеашї пѫнкtѫpї M, G, C, înвîptind алidada împpeжѫpѫл пѫнкtѫлѫї *b*, шi op de кîte opї вom вiza ѫн пѫнкt dintp'ачеstea, вom tpaце о лiniе кѫ кpeioнѫл. Ачеste лiнiї ноѫе вop tъia пе челе d'întîiѫ în пѫнкtѫpiле *c*, *g*, *m* каре вop fi pепpesentaціеа обiектелоp вizate, шi dѫпе че вoш însemna кѫ чеpнеалъ ачеste diфepite пѫнкtѫpї, вoш шtepце лiniiле tpase кѫ кpeioн.

Ачеst mod este întemeiat пе asemънapea чеа înвedepatъ a tpiѫнгiѫpiлоp de пе хîptie шi de пе пъmînt, fiind къ ѫнгiѫpiле de пе пъmînt sînt fopmate din пpeлѫнціpea латѫpeлоp ѫнгiѫpiлоp de пе хîptie.

Se веde къ ачеst mod este пpea înлesniчios, пentpѫ къ ѫнеште în ѫна шi ачееашї опеpаціe мъsѫpatѫл ѫнгiѫpiлоp шi pапоptapea лоp пе хîptie.

înълцimea ninзлелор, ремплаsate зne-орї de о лзnetъ плонжаntъ, не ажзtъ sъ веdem пзnktзрї преа denъртate de nіво ал обсерваторзлзї, шi este înвеdepat къ зnгїзрiве înклinate ла орizont sînt toate peдзse не планшеtъ.

De nз se поate веdea din еstpemitъцiле nзmaї але зnзї вас, toate обiекtеле de deskpis, вом лза sзкчеsiв atîtea басзрї кîte вор tребзi ка sъ копрinzъ не toate dзne кзm am аръtat maї sзs.

75. Зne-орї xîрtiea de не планшеtъ копрinde toatъ împрежмзiреа локзлзї; dap преа des, пentрз komoditatea шi eksaktitatea операцiеї, foaea este pîndзitъ întpeагъ nзmaї пentрз о парte din планзл че este а se pidiка, шi пentрз ачеаsta трацем не dînsa maї întîї лiniiле че s'aз detepminat, întpe каре tребзе sъ фачем ачеаstъ pidiкаре парцiалъ, dap не о sкалъ каре sъ fie кз mзлt maї mape de кît ачееа а планзлзї џeneрал, шi каре sъ se aiбъ кз dînsa întp'зn рапорt simплз, sпре екsемплз, înчinчitъ. Dзne че se isпръвеште операцiеа, зnim ачеst desemn парцiал кз планзл џeneрал, фъкînd о figзpъ asemenea не о sкалъ de чinчї орї maї mікъ dзne modзл аръtat (n° 64, 2°).

§ 2. А PIDIKЪ ПЛАNЗЛ ЗNЗЇ ЛОК DE КАРЕ NЗ NE ПЗТЕМ АПРОПIIА.

76. Inteрiорзл зnзї лок че este а se pidiка поаte fi neапропiiat în doъ кinзрї: saз sînt stавiле каре не опрesk а не апропiiа, dap фъpъ de а опрi din веdepe diверseле обiекte; прекзm sînt бълцiле, оstроавеле шчл.; saз къ inteрiорзл este акоперit, шi

пѫtem вedea пѫmaĭ kontѫрѫл; прекѫm, sпре ексешплѫ, о пъdѫре, о четате імпресѫратъ.

În казѫл d'intiĭѫ, лѫъm ѫп бас аfаръ, ші determinъm toate пѫпкtѫріле въzѫte, прекѫm am arъtat maĭ sѫs. Ачеst каз пѫ se поаte sокоti ка о esчепціе.

77. În казѫл d'ал doiлеа, вom înкide локѫл, каре ва fi о пъdѫре, sпре ексеmплѫ, întpe лinii de тъіеце, de пѫ este înкisъ de вре ѫп fел de împрежтѫіре, ші вош тъsѫра пе din аfаръ ші лѫпціmea dрептелор, ші ѫпгіѫріле че еле fак întpe dînseлe. Вom fаче пе хîрtie ѫпгіѫрĭ екѫале, ші вom лѫа лѫпціmĭ пропорціонале кѫ лаtѫреле полігопѫлѫĭ, dѫпе sкала че пе вom fi алеs. Ast-fел вom detepmina kontѫрѫл fігѫреĭ че пѫ 'л пѫtem репресеnta алt-fел; ші dака операціiле sînt біне fъкѫte, ачеst kontѫр se ва înкide sінгѫр, чееа че este ші ѫп міжлок de верifікаре.

IIª ПАРТЕ. А РIDIKA FЪРЪ INSTРѪМЕNTE.

78. Ачеst mod преа sішплѫ stъ întpѫ а desпърці локѫл în tpiѫпгіѫрĭ, прекѫm am fъкѫt пînъ акѫm. Dар în лок de а тъsѫра ѫпгіѫріле ші о лаtѫръ, тъsѫръm kîte tpeле лаtѫре але fie-кърѫiа tpiѫпгіѫ, ші însemnъm пе крокі кѫ mаре бъгаре de seашъ пѫшереле аfлаte. Dѫпе ачеаsta, лѫînd пепtpѫ лаtѫреле ачеstор tpiѫпгіѫрĭ лѫпціmĭ пропорціонале, dѫпе sкала алеasъ, вom fаче пе хîрtie tpiѫпгіѫрĭ кѫ kîte tpeле лаtѫре dѫпе проблеmа. (Теоріеа *n°* 90).

Ачest mіжлок neste nвtinцъ a se nвne în лвкраре ла локвrі marі, din prічina лвnцimiї операцieї, este лesnічios кînd іл întpeввinцъm ла sвпrafeце mічі, преквm гръdinі, кврцї, пieце, паркврі, апартamente. Шi fiind къ ачestea sînt maї dese, ачest metod este чел maї tpeввinчios.

79. Чea maї mape napte din операцiiле к a d a s t p в л в ї se faчe nвmaї кв ланцвл de apnentop, шi челе maї mвлte indiвidврі че sînt însърчinate кв aчeastъ лвкраре nв шtiв teopiea, шi aв de повъцвitop nвmaї pвtina: каре este de ажвns nentpв ачest feл de операцiї. Fie (Fig. 65) o кîmnie desпърцitъ în пърцї de лок але кърора mapцinі sînt лiniї dpente. Dвчem dвne вое o dpeaптъ AB каре petpeчe кît se ва nвtna maї mвлte dintp'aчeste пърцї de пъmînt, чеea че se faчe ка tot d'aвna npin кîte-ва mъieце; oвiчnвim înкъ a o aлiniа пе доъ oвiekte însemnate, A шi B, a кърора nosiцie, преквm шi ачеea a tвtвлор nвnктвriлор însemnate але локвлвї, s'a determinat maї 'nainte кв графomeтpвл npin fopmвле tpigonometpiче. Dвne aчeasta, mъsвpъm кв ланцвл distanцеле A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, A*g*, AB din nвnктвл A ла diвepseле nвnктврі de intepsекцie але лiniiї AB кв mъpцiniле diвepseлор пъptiчеле de лок; dвne aчeasta mъsвpъm ла dpeanta шi ла stînгa ачестор diвepse nвnктврі, din *a*, spre eксemnлв, лвnцimiле *ap*, *an* tepminate ла алte доъ лiniї DK, AT aflate пе лок, saв кеар fъквte apлifiчiал преквm AB. Daка în sfîpшit mъsвpъm лвnцimiле D*m*, D*n*, DS, DC, DV, DK, вom aвea tot кît ne tpeвве ка sъ mъsвpъm dpentеле A*m*, *pn*, S*u*; къчї fiind къ челе доъ dpente AB шi DK se aflъ пе план, лвînd пе ачeste

dpeñte, începînd din пвнктвріле A ші D, лвнџімї еквале кв кîtімїле аїлаte A*a* ші D*m*, A*b* ші DS, шчл., вот авеа кîtе доъ пвнктврї în fie-каре din dpenteле A*m*, *an*, *bs*, чеea че deteрminъ deреквіеа лор, ші авет кътре ачеstea лвнџітіле лор пріп тъсврї dipeкte.

Sistema челор доъ лiniї dpente AB, KD пot слвжі спре deteрminapeа тstвлор лiniілор despre каре ворбіт, пentрв къ еле sînt tot d'авна тъеte de ачеste доъ dpente de ле вот прелвнџі îndestвл; dap a desea este fолositор ші înкъ требвinчios a skiшба аксвл, însъ нв skiшбът nimiк în mod. Аша, am пвtea deteрmina лinia *rz* прелвнџind-o întîів пînъ ла întîлнipea sa кв dpeanta DK, ші тъсврind *g*A ші *go*. În локвл ачеstора вот тъсвра A*g* ші *br*, ачеastъ a doa кîtіme fiind лвatъ пе о лinie че este deteрminatъ. Este лesne a înџелеџе двпе ачеasta totвл операџіеї. Ачеst лвкрв терџе вte, ші аре требвінџъ нвмаї de oameнї кв лваре a minte ші deпрінші, întpe каре este împърџit de Џеометрв tpівнгівлатор. În sfîpшit, тъсвра свпрафеџії локврілор se ia de пе план ші двпе skaла sa.

80. Se пот întîmпіna stabiле пе лiniiле de тъсврат, пепotрівірї, спре ексемплв, каре съ опреаскъ întindepea ланцвлвї кв каре не слвжім. Fie лiniea AD (Fig. 66) каре съ аїбъ de stabiлъ тобіла S. Вот întinde пе d'асвпра лвї S о sfoapъ G*m* преа орізонталъ, ла атîndoъ еstpeмitъціле къріia вот atîрna доъ fiре кв плвмб, ast-feл în кît съ atinгъ пътîntвл în доъ пвнктврї але пърџії тъсврабіле a лinii AD. Fie AC ачеste доъ пвнктврї, вот авеа G*m* = AC, ші вот врта тъсвръtoapeа двпе обічеів.

Bom аръta шaï ла вале кsm se поate întinde о коар-dъ opizontaл (96).

81. Bom пstea sne-opï sъ ажsnцem tot аколо printp'sn miжлок maï лesne. Bom tpaцe кînd ва epta локsл, о лinie ZX, параleлъ лsï AD, шi пe каре вom лsa distanцa челор doъ пsнкtspï каре вор fi în faцa пsнкtspiлор А, С.

82. În sfipшit, пstem înкъ pidiка планsл snsï лок de каре ns пe пstem апропiiа пe d'înъsntps, пs-maï кs ланцsл шi тъieцeле.

Fie *abcdgfm* sn лок de каре ns пe пstem апро-piiа пe d'înъsntps, пpeкsm о пъdspe, sn паpк în-кis кs zid, în каре ns пstem intpa, шчл., вom mъ-ssра întîis лatspeлe; dsпe ачeasta, ка sъ авem sn-гisріле, вom пpeлsнцi лatspa *ba* dsпe вое кs ланцsл пînъ ла sn пsнкt *p*; вom dsче шi пe *mp* кs ланцsл, шi вom mъssра кîte tpeлe лatspe але tpisн-гisлsï *amp*, шi ачeasta пe ва ажsta а 'л fаче пe хîptie. Sнгisл esteріор ал tpisнгisлsï *map* în *a*, ва fi sнгisл de пe пъmînt копpins întpe *ab* шi *am*. Se вede къ tot кs кinsл ачesta пstem determinа toate sнгisріле поліgonsлsï (Fig. 67). Авem кътpe аче-stea лsнцimea лatspeлор, шi ачestea sînt toate de кîte авem tpeбsinцъ ка sъ 'л fачem пe хîptie.

În лок de а mъssра кîte tpeлe лatspe але tpisн-гisлsï *map*, пstem mъssра пsmaï doъ лatspe *ap*, *pm*, daка лiniea *mp* ва fi fost dssъ пepпendiкsларъ пe *ap*. Алeцеpeа întpe ачeste doъ modspï tpeбsе sъ atîpne de чepкonstъріле локале. Шi înкъ, ns este de неапъpat tpeбsinчios а лsа лatspa *am* întpeагъ ка sъ fачem tpisнгisл ажstъtop; am пstea sъ пe mъл-цsmim пsmaï кs о parte *as*, шi sъ fачem sn tpisнгis

asv; каре, ворбind teopetiчeште, преџѕеште tpiѕn-гюл total *amp*; dap nѕ tpeбѕe sъ ѕitъm къ kon-stpѕkџiiле челе mapĭ determinъ tot d'aѕna liniiле maĭ eksakte de кit челе mічĭ.

Мъѕѕрътоарея кѕ пічіорѕл ші кѕ пасѕл.

83. Este ѕn miжлок de a тъѕѕра liniiле dpen-te, ші de a апліка прinчinѕріле пречеdente fъpъ de a intpeбѕinџа nічĭ ѕn instpѕment, nічĭ кеар sfoapa. Ачest miжлок foapte simплѕ, ші пе каре iл ape tot d'aѕna чineва кѕ sine, se intpeбѕinџеазъ кѕ atit maĭ des, кѕ кit maĭ des авem tpeбѕinџъ sъ тъѕѕрът fъpъ a fi пperътiџĭ пentpѕ ачеasta. Noĭ врem sъ ворбim despre тъѕѕратѕл лѕnџimiлор кѕ пічіорѕл отѕлѕĭ.

Лѕnџimea ѕnѕĭ om bipsnik, saѕ maĭ bine ачееа a inкълџъmintei sale, este o лѕnџime каре tpeбѕe konsideратъ ка statopnікъ. Daкa dap am кѕnoaште ачеastъ kitime кѕ o mape пречisie, омѕл ар пѕtea тъѕѕра кѕ челе doъ пічіоаре але sale прекѕm тъ-soapъ кѕ metpѕл, кѕ о sfoapъ, saѕ кѕ opĭ-че alt in-stpѕment, нѕmaĭ кѕ ачеastъ deoseбipe къ операџiiле se вор fаче maĭ лesne, ші instpѕmentѕл nѕ ва гре-ші nічĭ o datъ.

Tpeбѕe dap sъ кѕnoaштem nѕmaĭ лѕnџimea in-кълџъmintei, ші ачеastъ determinaџie este пpea sim-плъ. Am пѕtea s'o лѕъm d'a dpentѕл; dap sfъtѕim sъ алергъm maĭ bine ла miжлокѕл ѕрmътор, пѕnem amindoъ пічіоареле ѕnѕл inaintea altѕia de kite-ва opĭ, de o sѕtъ de opĭ spre eksemплѕ, пе o linie пpea dpeaптъ, ші пе o sѕпрафаџъ плаnъ; тѕѕѕрът

кꙋ бъгаре de seamъ ачeastъ лꙋнџime, ші о împър-џim прin нꙋmърꙋл de kîte орї s'а нꙋs пiчiорꙋл. Fie спре еџsemплꙋ, о лꙋнџime de 13^{m},750 репресentînd de 50 de орї лꙋнџimea пiчiорꙋлꙋї, ꙋn пiчiор ва fi dар $= \frac{13,750}{50} = 0^{m},275$. Тревꙋе sъ лꙋъm ачeastъ mъsꙋръ о datъ пentpꙋ tot d'аꙋна пînъ ла miлimetpe інкꙋsiв. Кꙋ ачeastъ апрокsimaџie нꙋ вom авеа о грешалъ de 15 metpe ла доъ miлꙋрї.

Ачeaвtъ mъsꙋръ înвedepat преа komodъ este în-tр'ачeeaшї вреme atît de eksaktъ în kît пentpꙋ mꙋлte кꙋвinte noї о sокotim maї presꙋs de kît чеа fъкꙋtъ кꙋ ꙋn metpꙋ пꙋs în капꙋл алtꙋia, saꙋ̆ de о sfoaръ а къріia întindepe îї варieaзъ лꙋнџimea; чел пꙋџin ачeasta se întîmплъ kînd mъsꙋръm пе о sꙋпрafaџъ плапъ, ші пъzind о лinie преа dpeaптъ. Noї о mъptꙋpisim къ не плаче преа mꙋлt ачest mod, каре нĕ а ажꙋtat преа mꙋлt în mꙋлte întîmплърї, ші а кърії варifiкаџie а dat о eksaktitate вpednікъ de miраре.

84. Ꙋn алt mod de mъsꙋрat преа обічнꙋit пе пъmînt este кꙋ пasꙋл omꙋлꙋї. În kît пentpꙋ eksak-titate, ачest mod нꙋ mepitъ înкpedepe. Пꙋtem sꙋ-пꙋне къ întр'ачелашї марш пasꙋл este tot ꙋна de mаре; dар este о mꙋлџime de пашї difepiџї, dꙋпе ꙗџeaла шергъtорꙋлꙋї; ші ачeastъ ꙗџeaлъ depinde de чіркоnstънџe че нꙋ ле пꙋtem diskꙋta. Аша пasꙋл se întpeбꙋinџeaзъ нꙋmaї ла pidікъріле de пꙋџinъ eksaktitate, прекꙋm рекꙋноаштеріле miлitаре, крокі, ші алтеле; ші întр'ачeste казꙋрї, se deosiбеште пasꙋл de плімбаре, пasꙋл de ꙋmблат, пasꙋл de алергъtꙋ-ръ, mъзор înкъ ші кꙋ пasꙋл калꙋлꙋї. Ка sъ dea

ачеstеĭ мъсурĭ чева пречisie, noĭ sfъсуim sъ fакъ întîĭŭ кiцĭ-ва пашĭ, пе о лinie dреапtъ, кu о югеалъ арвitраріъ, dар коnfорmъ кu disпuнереа актуалъ а операtорулуĭ; sъ mъsоаре кu пiчiорул лунцimеа пеtрекуtъ, шi sъ îmпарцъ нуmърул mеtрелор аfлаtе прin нуmърул пашiлор. Ast-fел вom афла лунцimеа уnuĭ пas, шi ар trевуi sъ пъzim ачееашĭ югеалъ în tot курsул операцiiлор.

85. Мъсура кu пiчiорул se întребуinцеазъ преа мулt ла suпрафецеле miчĭ, прекуm курцĭ, гръdinĭ, лiвеzĭ, холdе, drumурĭ, пiеце публiче, шi маĭ кu dinadinsул апарtаmенtе. Формеле însъ ачеstор din урmъ suпрафеце пot прiiшi оаре-каре simплiфiкърĭ ла рiдiкареа лор, шi пенtру каре вom ziче о ворвъ.

Маĭ toate лiнiiле каре компун гръdiniле шi апарtаmенtеле sînt паралеле шi перпенdiкуларе; унгюрiле sînt dрепtе шi пърцiле опусе sînt екуале. Dintр'ачеasta урmеазъ къ în лок de а mъsура кîtе треле лаtуре în triунгюл PBG (Fig. 68) dрепtунгĭŭ în B, este destул sъ mъsуръm челе doъ лаtуре але унгюлуĭ dрепt, шi sъ ле пунеm перпенdiкуларе уна пе алtа пе хîрtie. Asemenea este пенtру алее, гръdinĭ шi алtеле, în каре este destул sъ mъsуръm doъ лiнiĭ, каре sînt dimensiiле уnuĭ dрепtьнгĭŭ. Аша mъsура кu пiчiорул este преа комоdъ пенtру ачеаsta. Noĭ însъ маĭ аdъогъm къ trевуе sъ se înкреdinцеze маĭ întîĭŭ dака унгюрiле sînt dрепtе, кînd este вре-о прiчinъ de въnuit; каре se ва fаче, прекуm s'а аръtаt (n° 31).

Ла zidiрĭ, гроsimiле zidурiлор fак пе план fiгурĭ dрепtунгюларе пе каре ле уmпле кu черпеалъ неагръ saŭ рошiе, кînd desemнул zidiрiĭ este пе о sка-

лъ mape. Dap dака skaла este mikъ, ȣmплem kȣ чepneaлъ sȣпpafaца че penpesentъ zidipiле; шi алвȣл pъmine pentpȣ kȣpцĭ шi гpъdinĭ.

86. În цепepал, пȣ este destȣл sъ tpaцem пȣmaĭ niшte siшпле пȣпktȣpĭ пе о foae de xîptie, ka sъ авem penpesentaцiea komплektъ a ȣпȣĭ лok. Înteлiцinцa natȣpeĭ лokȣpiлop чepe întpeвȣinцapea a вpe-o kite-ва indikaцiĭ konвenite. Dintp'aчeasta ȣpmeazъ о aptъ akчesopiъ ла pidikapea цeometpikъ, apтъ kape konstъ maĭ пpinчiпал în komвinapea a вpe-o kite-ва пȣanцe de вълseле kȣ niшte semne simпле; ast-feл în kit ла inspekцiea вълseлeлop se poate pekȣпoaшte komposiцiea fie-kъpiia пъpцĭ a sȣпpafeцiĭ пъmintȣлȣĭ. Aчeastъ apтъ, kape se пȣmeшte **л a в i s**, пȣ цine de domenȣл Цeometpieĭ; noĭ îndpeптъm pentpȣ aчeste пpinчine, ла tpaktatȣpĭ speчiaле, oвsepвind kъ simпла deskpiepe цeometpikъ a лokȣpiлop este, maĭ de mȣлte opĭ, în destȣлъ pentpȣ пpoпpietapĭ, apшitekцĭ шi apnentopĭ.

Pentpȣ Niвiлaцie.

87. Noĭ am zis kъ sȣпpafaца лokȣлȣĭ epa tot d'aȣna sokotitъ ka пpoiektatъ пе ȣп плan opizontaл, шi kъ epa пpin ȣpmape neчesapiȣ a tpaцe пpofiлȣл sȣпpafeцiĭ, sȣпosatъ ka tъiatъ пpintp'ȣп плan вeptikaл, în dipekцiiле aчeлea kъpopa tpeвȣe sъ kȣпoaшtem difepinцa înълцъpiĭ. Ka sъ tpaцem aчeле пpofiле, tpeвȣe sъ шtim nівeлa difepiteлop пȣпktȣpĭ aле ȣпeĭ sȣпpafeцe.

Kind doъ пȣпktȣpĭ sint d'o potpiвъ depъptate de цentpȣл пъmintȣлȣĭ, шi пȣцin depъptate ȣпȣл de aл-

tȣл, trebȣ sъ se apate întp'ачелашĭ плаn opizontaл, шi zічem atȣnчĭ къ еле sînt în n i в o. Difepiteлe пȣnktȣpĭ але sȣпpafeцеĭ ȣneĭ апе ліniштite sînt întp'ачеastъ stape; ачеastъ sȣпpafaцъ nȣ este ȣn плаn aдевъpat, пentpȣ къ este o пapte a ȣneĭ sȣпpafeце sfepiче, aвînd de чentpȣ пе ачела ал пъmîntȣлȣĭ. Însъ întp'ȣn sпачіȣ mік кȣpбȣpa este nesimцitъ, шi ачеsta este tіпȣл ȣnȣĭ плаn opizantaл.

88. Daка доъ пȣnktȣpĭ nȣ sînt d'o potpiвъ depъptate de чentpȣл пъmîntȣлȣĭ, difepinцa distanцелор лор ла ачеst чentpȣ se detepminъ пpin опеpaцieа че o nȣmesк n i в i л а ц i е, шi instpȣmenteле кȣ каpe se sлȣжеsк ла ачеаsta se nȣmesк n i в е л е. Sînt доъ feлȣpĭ de niвeле: n i в е л а d е а п ъ шi niвeлa кȣ б ъ ш i к ъ d е а е р.

Niвeлa de апъ este o цеавъ de fep алб SS' (Fig. 69), îndoitъ ла amîndoъ estpemitъцiле saле, каpe пopt доъ stiклȣце saiлante, ȣmплȣte o пapte кȣ ȣn ліквid колорat, шi комȣnікînd кȣ цеава. Пе stiклȣце sînt tpase дȣnцĭ întp'ȣn плаn паpалел кȣ аксȣл цеџеĭ; ast-feл în кît кînd ачеsta este opizontaл, шi ліквidȣл se pidiкъ пînъ ла дȣnгъ întp'ȣna din ачеste stiклȣце, tpeбȣe sъ ажȣnгъ ла дȣnга кopesпȣnzъtoape de пе sȣпpafaцa челеĭ d'ал doiлеa. Dȣпе ачеst semn кȣnoaштem дака цеава este opizontaлъ; întp'ачеst din ȣpmъ кas, къȣtъm a'ĭ da пosiцieа кȣвiinчioasъ: niвeлa аpe ȣn пiчiop ка ал гpafometpȣлȣĭ.

89. Dȣпе ачеаsta de воim sъ кȣnoaштem difepinцa de niвo a доъ пȣnktȣpĭ, C, Y, вom пȣne niвeлa în C, шi o вom aшъza opizontaл. Вom fiкsa în Y o пpъжinъ вepтiкалъ шi гpадȣatъ KY; апоĭ ві-

zînd dȣпе лiniea SS′, че se aflъ пе планȣл ȣпрафецелор лiкȣide, вом însemna пȣпктȣл *p* че раzа вizȣалъ întîлпеште пе пръжiпъ; ачest пȣпкt ва fi în пiво кȣ SS′. Дака dар вом тъсȣра îпълцimea *p*Y, шi îпълцiшea instрȣmentȣлȣї, diferinца лор ва fi diferinца de пiво а челоd доъ пȣпктȣрї C, Y.

Tot кȣ кiпȣл ачesta вом пiвела distanца CB, îптре ȣпȣл din ачesteа шi ȣп ал treiлea пȣпкt B; dȣпе ачeasta вом trече ла ȣп ал patрȣлеа пȣпкt A, шi аша маї înколо; вом авеа dар прiп кîte-ва операцiї sȣкчesiве, diferinца totaлъ de пiво întре доъ пȣпктȣрї орї шi кȣm ашъzate, ȣпȣл în рапорt кȣ чел-л-алt.

Fiind къ întр'о distanцъ de 250 метре чел мȣлt, пȣпкtȣл *p* пȣ se прea поate веdea, sîntem siлiцї съ fачem маї мȣлte stацiї апропiiate. Пȣtem редȣче пȣтърȣл ла жȣmътаte în кiпȣл ȣрmъtор. Fie B, Y доъ пȣпктȣрї але кърор depъртаре este îndoitъ de пȣтереа пiвелеї, шi пеntрȣ каре ар treбȣi доъ stацiї. Вом пȣпе instрȣmentȣл маї în мiжлокȣл intерваллȣлȣї че ле despapt, шi вом вiza sȣкчesiв челе доъ пръжiпї B*q*, YK, пȣindȣ-пе ла челе доъ estремitъцї опȣse але пiвелеї. Deferinца de пiво а ачеstор доъ пȣпктȣрї ва fi B*q* маї пȣцiп *p*Y; шi вом съвîрmi лȣкрареа а доъ stъцiї пȣмаї кȣ ȣпа, кȣ о ашъzаре de пiвелъ пȣмаї.

Niвiлацiea чере дої операторї, din каре ȣпȣл съ вizeze, iар чел-лалt съ însemneze пȣпкtȣл *p*. Sпре ачeasta, treбȣе съ fакъ съ алȣпече în лȣпгȣл пръжiпеї о бȣкатъ de кapton пътратъ, пȣмitъ miръ, despърцiтъ în доъ пърцї, ȣпа пеагръ шi чееалалтъ албъ, а кърор лiпie de despърцiре treбȣе съ se вазъ de об-

sepвatop. Пpin semne хotъpîte, apatъ ажstopsлsї sъš de tpeбse sъ кoбoape saš sъ pidiче mipa; шi кînd, dsпe вpe-o кîte-вa înчepкъpї, лiniea пeагpъ se întîлпeшte de paza вizsaлъ, oпpeшte mipa, шi sъ sîtъ sъ вazъ кs чe пsпкt aл гpadaцiei пpъжinei ea кopъsпsпde.

90. Nівела кs бъшiка de aep (Fig. 70) este o цeaвъ de stiклъ înкisъ întp'sп чiлindps de apamъ, пssъ пe o miкъ piглъ de aчeлaшї metaл, tepminatъ de pinsлe кs кpъпъtspї opizontaлe. Цeaвa de stiклъ este maї плinъ de sп лiкsid, maї oбiчпsit de aлкooл, шi spaчisл гoл de лiкsid este oкsпat de sп miк вoлsmin de aep. Цeaвa fiind înкisъ, бъшiка de aep, maї sшoapъ de кît лiкsidsл, пs se вa pidiка лa пaptea чea maї înaлтъ a цeвeї, pînъ кînd aкssл sъš пs вa fi opizontaл; însъ, daка цeaвa кs toate aлe saлe este întp'o пosiцie opizontaлъ, fiind къ atsпчї пs este пpiчinъ ка бъшiка sъ se dsкъ întp'o пapte saš întp'aлta, ea se вa oпpi în *a* кътpe miжлoкsл цeвeї. Кs toate aчestea, daка aчeasta ap fi fost sп чiлindps пpea dpeпt, s'ap întinde toatъ întp'o dsпгъ, пeпtps aчeasta o iaк tot d'asпa чeвa кspбъ, шi бъшiка de aep se копчeпtpeazъ în miжлoк, кape este пaptea чea maї pidiкatъ. Dsпe aчeasta se кsпoaшte opizontaлitatea пiвeлeї.

Aчest instpsment кape se пoaptъ de sп пiчiop ка гpafometpsл, pemплaseazъ пiвeлa de aпъ кs aвaпtaцiš; къчї de o пapte, mapea simцiбiлitate a бъшiчeї detepminъ o opizoпtaлitate пepfeктъ, шi de чeeaлaлтъ, fiind къ adesea sssstitse în лoкsл pinsлeлop o лsпetъ aл къpiia aкs imoбiл este пapaлeл кs пласsл aлidadeї, se пoate вedea mipa întp'o mape de-

пъріаре; каре їппыціnеазъ пътърыл stаціілор. Nівелеле кы лыпеtъ sînt fъкыte кы îngріжіре, ші аў вісырї de рапел sысчепtівіле de а ле da шішкърї преа moї, în sfîрші ка sъ adыкъ бъшіка ла posіціеа кывіінчіоasъ; пымаї ачestеа se întребыіnцеазъ de іnціnерї pentры nівілаціï марї. Nівела кы бъшіка de аер fъръ пічіоаре ші лыпеtе sлыжеште маї de обште ка sъ верібіче оріzоntaлitatеа sыпрафеделор пе каре о порт în toate sensыріле. Se întребыіnцеазъ маї кы dinadinsыл ка sъ ашеzът оріzоntaл лімбыл графоmetрылыї ші ал черкылыї репеtitор.

91. Noї am sыnosat în toate челе пречеdente къ doъ пыпктырї ар fi de nіво кînd еле sînt ашеzате пе о ачееашї лініе оріzоntaлъ; însъ ачеаsta este adeвърatъ пымаї кînd întindереа este мікъ; întре doъ пыпктырї depъртате de ып міл, іпоtesыл este преа пеексакt. Fie A, B ачеле doъ пыпктырї; de вор fi amîndoъ пе о ачееашї лініе оріzоntaлъ, еле sînt пе nіво чел апаренt, ші în distанце пеексале de чепtрыл пъмîntылыї; вор fi însъ пе nіво чел adeвърat, de sînt amîndoъ пе ып ачелашї арк ал черкылыї пъмîntылыї (Fig. 71). Кы кît înaintъm de ла ыпыл dintр'ачеste пыпктырї кътре чел-лалt, nіво чел adeвърat sыферe о апъsаре, sыбt nіво чел апаренt. Ачеаstъ апъsаре каре este маї пылъ întр'ып interвал de 300 metре, ажыпце sішцівілъ întр'о distанцъ de 1000 metре; ші, кînd nівілаціеа se întinde пînъ акоlo, требые sъ о цінем în seamъ, комбінînd-о кы diferінца de nіво апаренt а пыпктырілор observate. Еаtъ кыm se determinъ ачеаstъ апъsаре.

Раzа міжлочіе а пъмîntылыї fiind de 6366200 metре, de вом лыа AB = 1000 metре, вом авеа

ꙋn tpiꙋnгiꙋ dpeптꙋнгiꙋ OAB, каре ва da (Теор. n^o 102): $\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$; de ꙋnde $OB=\sqrt{(6366200)^2+\overline{1000}^2}$ $=6366200,0785$; de ꙋnde $BI=0^m,0785$ ла distanцa de 1000 metpe. Se поate калкꙋла asemenea апъ-sapea de niво adeвъpatъ пentpꙋ opĭ че distanцъ AG; dap sꙋпꙋind къ AG нꙋ este maĭ mape de zeче miле, aflъm къ GC se deosiбeщte de AH нꙋmaĭ кꙋ кite-ва чentimetpe, ast-feл în кit пꙋtem întp'aчest inteр-вал sъ sꙋпꙋnem къ облiка GC se конfꙋndъ кꙋ AH. Dꙋпe aчestea, щi sꙋпꙋind înкъ къ ꙋn арк se кon-fꙋndъ пe simцite кꙋ коарda sa, вom afла (Теор. 82) къ аркꙋл AI este mijлочiꙋ пропорцiонал întpe dia-metpꙋл întpeг, щi апъsapea AD de niво чел ade-въpat ал пꙋнктꙋлꙋĭ I, sꙋбt niво чел апapent; аша dap, aчeastъ апъsape este екꙋалъ кꙋ пътpatꙋл ap-кꙋлꙋĭ îmпърцit пpin diameтpꙋл, щi пpin ꙋpmape, апъsъpiле se aꙋ întpe еле пpeкꙋm пъ-tpateле аркꙋpiлop, saꙋ, каре este tot ꙋna, пpeкꙋm пъtpateле distanцелop.

Daка dap, se ва чере difepinцa de niво каре поate fi întpe doъ пꙋнктꙋpĭ depъptate de 5000 me-tpe, вom fape пропорцiea.

$$\overline{1000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,0785 : x = 1^m,9625.$$

Adiкъ къ daка ꙋn пꙋнкt B depъptat de 5000 metpe de пꙋнкꙋл A, se aflъ în niво ал sъꙋ чел a-пapent, ел ва авеа o pidiкape de $1^m,9625$ пeste ал sъꙋ niво чел adeвъpat A. De ap fi fost ла $0^m,85$ maĭ sꙋs de niво чел апapent ал лꙋĭ A, ap fi fost ла o înълцime totaлъ de $1^m,9625+0,85$ saꙋ $2^m,81$; de ap fi fost din контpa de $3^m,10$ sꙋбt niво чел апа-pent, ap fi sꙋбt niво чел adeвъpat ал лꙋĭ A, de $3^m,10-1^m,96$ saꙋ $1^m,14$; щi пpin ꙋpmape aчest din

ϐрmъ нϐmър ар еsпріша кϐ кіt ел еstе маї апроапе de кіt A de чепtрϐл пъmîntϐлϐї.

92. Dϐпе ачеаstа ка sъ fачеm профілϐл ϐнϐї лок, dϐпе о лініе datъ, воm ніведа dіfеріtеле пϐнкtϐрї але ачеstеї лінії din distanцъ în distanцъ; dϐпе ачеаstа вом tраце пе хîрtіе о dреапtъ екϐалъ кϐ sϐma distanцелор орізопtале а dіверsелор stацїї, реdϐsе пе skалъ, шi ϐп пϐпкt de але еї sе ва sоkоti ка репрезепtînd пϐнкtϐл чел маї жоs ал локϐлϐї. Вом desпърцi ачеаstъ лініе în пърцї каре sъ fіе екϐале кϐ dіверsеле distanце але stацііlор, шi рідікînd перпендікϐларе екϐале кϐ dіfеріпцеле de ніво а tϐtϐлор пϐпкtϐрілор нівелаte кϐ пϐпкtϐл чел маї de жоs, воm ϐпі еstреміtъцiле лор пріп о tрътϐръ конциnϐtъ, іmіtînd ϐшϐрелеле sіпϐоsіtъцї че вор еsіstа de ла ϐп пϐпкt ла алtϐл; шi аша sе ва fаче профілϐл черϐt (Fig. 72).

93. Dар, de воеште чінева sъ dеа о ідее цепералъ de реліеfϐл ϐнϐї лок, алеаргъ ла ϐнϐл din ϐрmъtоареле доъ modϐрї.

Чел d'intîiϋ konstъ întrϐ а desemna пе плапϐл орізопtал іпекϐалітъцiле локϐлϐї, прекϐm mϐпцїї, în перspектівъ ка îпtр'ϐп tавло, копачії, каsеле, че sе вьd пе ачеst лок dϐпе fорmа лор шi мърimеа лор реdϐsъ ла skалъ. Înвеdераt, еstе konтра sепs în-tр'ачеst mod, каре konfϐпdъ dірекцiеа орізопtалъ кϐ dірекцiеа вертікалъ; de вом zічe къ акчidентеле локϐлϐї sînt вьзϐtе în перspектівъ, tребье sъ арътъm tоt локϐл sϐвt ачелашї аsпект; însъ, перspектіва dеформъ кϐ tоtϐл desemнϐл ϐнϐї плап орізоп-tал. Кϐ tоаtе ачеstеа ачеst mоd еstе проа întре-вϐiпцаt, шi нϐ zічеm къ еstе рьϋ întреьϐiпцаt; пеп-

tpꙋ къ aчest defeкt de лоџікъ нꙋ прічінꙋеште нічĭ о грешалъ ла konsekꙋінцеле че tребꙋе съ tраџem din компꙋнереа ꙋнꙋĭ план, în време че аша satisfaче bedepea, ші dъ о idee кꙋраtъ de bedepea че ꙋꙋпрафаџа локꙋлꙋĭ înfъцішеаzъ обsepbatopꙋлꙋĭ.

94. Modꙋл ал doiлea mꙋлt maĭ paџional, dap ші maĭ пꙋџin плъкъt окюлꙋĭ, se întpeбꙋінцеаzъ în харtеле sabante, ꙋnde inџінерꙋл ва съ dea нꙋ нꙋmaĭ о idee de peлiefꙋл локꙋлꙋĭ, чі maĭ кꙋ dinadinsꙋл мъsꙋpa tꙋtꙋлор mішкърілор sале. Imaџineaзъ планꙋрĭ opizontaле dꙋse параλеле ла проіекціеа хартеĭ, ші d'опоtрівъ depъptate; aчeste планꙋрĭ desпарt локꙋл în бꙋкъцĭ de гроsimĭ екꙋале, ші mъpџinite de кꙋрбе пе каре ле проіектъ пе харtъ, tpeкîndꙋ-se прin пꙋнкtꙋріле aчesteia кърора нівелаціеа лё а dat de înълџime пе ачееа а бꙋкъці кърia ĭĭ înfъцішеаzъ базꙋріле. Кꙋ кіпꙋл aчesta, desemnꙋл se aflъ акопеpit de о мꙋлціme de кꙋрбе каре îл înконжоаръ (Fig. 73), ші каре sînt кꙋ atît maĭ апропііate ꙋнеле de алtеле кꙋ кît повîрнішꙋріле sînt maĭ pепеzĭ; кꙋрбе преа depъptate аръt повîрнішꙋрĭ ліне; ші, кînd maĭ мꙋлte кꙋрбе se konfꙋndъ în оаре-каре пърџĭ, кꙋm se bede пе фігꙋръ în пꙋнкtꙋл O, aчeasta аратъ къ аколо локꙋл este пъреtе în toaтъ înълџimea че копрind кꙋрбеле estpeme. De bom boi съ не facem о idee лъmꙋрітъ de повîрнішꙋріле копрinse întpe aчeste кꙋрбе, bom face ꙋн tріꙋнгю dpentꙋнгю aвînd de баз distanџа a doъ кꙋрбе konsekꙋtіbe, ші de înълџime, înълџimea комꙋнъ ші хоtъpîtъ a desпърџірілор, pedꙋsъ ла skaлъ; inotenꙋsa ва fi ліniea челꙋĭ maĭ mape повîрніш ал локꙋлꙋĭ, ші tріꙋнгюл ва fi поptpetꙋл профілꙋлꙋĭ. Tpeбꙋе dap съ не înboim ка съ fie

de o ѕnime de distanцъ планѕріле тъетоаре; însъ maї mѕлте konsideraцiї dobedesk къ ачеastъ ѕnime требѕе sъ fie sѕбордonatъ skaлeї. În sлѕжбеле пѕбліче, ea este хотърîtъ sъ fie de $0^m,50$ пentrѕ skaла de $\frac{1}{1000}$; de 1^m пentrѕ $\frac{1}{2000}$, ші аша maї înколо.

Dар fiind къ кѕрбе fъръ легътѕръ ші adesea преа depъrtate, nѕ pot da o idee îndestѕлътоаре de акчіdentеле локѕлѕї, se ажѕt кѕ ніште тръsѕрї dѕse transbersaл întpe кѕрбе în distanцe екѕале кѕ а шаsea парте а ачестора; ачесте тръsѕрї репресentъ проіекцііле лінілор de o maї маре повîрпіре. Se fak тръsѕріле sѕбцірї пе повîрпішѕріле ліне; пе повîрпішѕріле репезї, din потрівъ, каре sînt аръtate пріn апропіереа кѕрбелор, fak тръsѕріле лате каре daѕ o bedepe înкisъ пърцiї чеї maї репезї, ші ачеasta faче sъ se deosiбeaskъ ла чеа d'întîiѕ арѕnкътѕръ de окіѕ.

Хартеле fъкѕte dѕпе ачесте прінчіпе sînt преа folositoape în операцііле мілітаре, пentrѕ къ dînd тъsѕра повîрпішѕрілор, аръt каре sînt локѕріле ѕnde поате пътрѕnde алтелеріеа.

95. Nівілацiea se аплікъ ла o мѕлціме de desкоперірї преа imпортante. Врем sъ штim, sпре ексемплѕ, de пѕtem dѕче апа ѕnѕї isвор ла ѕn пѕнкt dat? Требѕе sъ afлъm diferinцa de ніво întpe isвор ші пѕнкtѕл кътре каре врем sъ dipiжъm апа; пentrѕ къ операцiea nѕ se поате faче daка ачеst пѕнкt nѕ este maї жоs de kît isворѕл. Sъ нівілъm локѕл каре требѕе sъ sлѕжeaskъ de албіе ѕnѕї канал проіектаt, ка sъ хотъраskъ sensѕл кѕрцеріі, пѕтърѕл ші întindepea basінелор de stabіларе. Кѕ нівілацiea

determinъm înълціmiле шaнцiлор, профiлеле лaкръ-рiлор de fortifikaцiї, deвле шi рeтвле але drumuрiлор. În sfîршit, în interiорuл орашелор, о înтре-буinцъm ла пaвaцiюл uліцiлор, шi прin ажuторуl ei se determinъ direкцiiле че тревuе sъ se dea куp-цeрiї пiраелор, ка sъ se duкъ ла diferiteле хaznале.

Пентру мъsuра basuрiлор.

96. Мъsuра unuї bas este o операцie каре a desea este преа греа de fъкut кu eksaktitate. Este destuл, ка sъ ne înкredinцъm de aчeasta, sъ în-semnъm къ лiniiле каре se пар maї пропрiї a îm-плini aчeasta, sînt maї tot d'aуna înтреruпte de inekuaлitъцiї, шi преа рар aў estremitъцiле лор пе o aчeeaшї лinie оrizontaлъ.

Ор-кind se ва putea sъ гъsim un bas лimpede шi de nivo, тревuе sъ профiтъm de dînsuл; ast-feл sînt алееле пaрчелор шi гръdiniлор; ast-feл sînt maї вîрtos drumuрiле челе mapї. Мъsuръm basuл кu лaн-цuл арпenторuлuї, saў în лiпsъ'ї, кu o sfoaръ кърiia dъm aчeлaшї град de întindepe.

Kind nu вom гъsi un ast-feл de bas, тревuе de o kamdatъ, прin ажuторuл графометруlуї, sъ mъe-цim кu луаре a minte лiniea каре вom fi aлes, шi sъ punem mъeцеле преа puцin denъртate unuл de aлtuл. Акum ръmîne sъ mъsuръm aчeste diverse distanцe; шi sпре aчeasta, вom întinde suкчesiв de ла un mъiar ла чeл-л-aлt o sfoaръ, îmплinind kon-diцiea de a fi bine оrizontaлъ; шi eatъ кum ne пu-tem înкredinцa de оrizontaлitate.

Fie Gm (Fig. 66) sfoapa întinsъ între doъ mъe-

це. Вom atîpna de ачeastъ sfoopъ, maĭ 'nainte de a o întpeбзінца, o sfopічікъ *anb*, ал кърііа тіжлокзл *n* sъ fie însemnat npintp'зn nod; distanца *ab* noate fi de op кît, de зn metpз snpe eксemnлз. Ачeastъ sfopічікъ este netpeкзtъ npintp'зn іnел, de кape este atîpnat зn fip кз nлзтб; este înбedepat къ, кînd sfoapa ва fi біne opizontaлъ, інeлзл ва aлзneкa ne sfoapъ, шi se ва aшeza în *n*; se ва întîmnлa алt-feл, кînd кoapda ва fi înклinatъ; aшa dap, întinzînd aчeasta ast-feл în кît sъ adзчem în *n* інeлзл шi fipзл кз nлзтб, ne вom afлa ne nosiціea opizontaлъ.

Tpeбзe кa distanца G*m* sъ nз fie maĭ mape de 4 saŭ 5 metpe, шi sfopічікa sъ fie зшoapъ, кa sъ nз onpeaskъ întindepea sfoapeĭ. Tpeбзe înкъ кa mъieціле sъ fie біne înцeneníte, шi nзnкtзpiле G шi *m* sъ fie біne detepminate. În sfîpшit, лзкpapea ne ва аpъta maĭ mзлte aлte amъpзnte, че este de npisos a ле apъta aiчĭ.

Oape кape modзpĭ naptiкзлape nentpз mъsзpatзл distanцeлop neanponiiate.

97. Кpedem къ nз ва fi de npisos a adъoга лa чeле npeчedente кîte ва mіжлoaче npea simnле nentpз mъsзpa лiniiлop neanponiiate: aчeste mіжлoaче n'aŭ tpeбзінцъ niчĭ de sfoapъ.

Fie 1° Зn nзnкt de кape nз ne nзtem anponiia A, кързia вoim sъ кзnoaшtem denъptapea лa nзnкtзл *m* (Fig. 74). Вom nзne în *m* зn semn oapeкape, o npъжinъ, snpe eксemnлз, шi ne вom denъpta ne лiniiea A*m*, ast-feл în кît sъ гъsim o no-

siцie S, пentpȣ каpe пȣпktȣл *m* съ se konfȣnde кȣ пȣпktȣл A. Bom пȣпe ȣn ал doiлea semn întp'алt пȣпkt apвitpapiȣ̆ *n*, шi вom къȣta tot кȣ кipȣл aчesta o пosiцie T, din каpe челе doъ пȣпktȣpĭ *n*, A съ se паpъ a se konfonda. Dȣпe aчeasta вom тъсȣpa кȣ пiчiopȣл челе пatpȣ лatȣpe але пatpȣлatepȣлȣĭ *m*ST*n*, шi ȣпa din diaгonaлeлe S*n*; кȣ aчeste лiniĭ, пȣtem faче пe xîptie d'o кam datъ tpiȣпгюл ST*n*, каpe вa detepmina пȣпktȣл *n*; dȣпe aчeasta пe S*n* tpiȣпгюл S*mn*, каpe вa detepmina пȣпktȣл *m*. Bom пpeлȣпцi лatȣpeлe S*m*, S*n*, каpe se вop întîлti întp'ȣn пȣпkt A; шi distanцa *m*A, papoptatъ пe skaлъ, вa fi distanцa къȣtatъ.

În adeвъp, пatpȣлatepȣл dȣпe xîptie este asemenea кȣ чeл de пe пъmînt, кa komпȣs de tpiȣпгюpĭ asemenea, шi asemenea aшezate. Aшa dap челе doъ ȣпгюpĭ S, T' sînt eкȣaлe кȣ челе de пe пъшînt; aшa dap tpiȣпгюл totaл STA este asemenea кȣ tpiȣпгюл fopmat пe пъmînt de челе doъ staцiĭ шi пȣпktȣл neaпpoпiiat.

2° Fie o лinie neaкчesiвiлъ, шi înкъ de вoim, пȣmaĭ пъpцĭ въzȣtъ, къpiia tpeвȣe съ'ĭ кȣпoaшtem лȣпцimea. Dȣпe чe вom faче пe xîptie tpiȣпгюл STA, каpe detepminъ пȣпktȣл A, вom detepшina пȣпktȣл B пpin o oпepaцie aпaлoaгъ, întemeindȣ-пe пe aчeлaшĭ вas ST. Distanцa sa AB ast-feл fъкȣtъ пe xîptie, шi papoptatъ пe skaлъ, вa fi distanцa къȣtatъ.

Se пoate, în tot кȣpsȣл aчestop oпepaцiĭ, съ пe шȣлцȣmiш пȣmaĭ кȣ ȣn шъiar, пe каpe îл stpъmȣtъm dȣпe tpeвȣinцъ, шi каpe пoate fi ȣn *om*. Tpeвȣe însъ съ îngpiжim a лȣa кît maĭ шapĭ se вop

пsіеа лінііле ST, mn, ка лінііле Sm, Tn, тъindв-se maĭ пвцin облiче, пвпкtвл A sъ fie maĭ лъmвpit determinat.

Теоріеа n° 82.

98. Прінчіпалеле întребвінцърĭ але ачesteĭ teopeme sînt челе врmъtoape.

1° Пвtem прін ажвторвл sъв, sъ skimбъm o fiгвръ pектілінъ op-кape întp'вn пъtpat еквівалеnt (Теоріеа n° 129 ші 120).

2° Пвtem estpaце цеоmetpічеште ръdъчіна апропіiatъ a впор пвmepe. Пеntpв ръdъчіна пътpatъ а лвĭ 6, sпре ексеmплв, вом лва о medie цеоmeтpікъ întpe doъ лінiї, авînd пеntpв лвнцimĭ pеsпектіве вна ші шase чеntimetpe; перпеndiкvлара, че пвtem mъsвpa, апроапе кв о жвmъtate de mілimeтpв, ва fi ръdъчіна пatpatъ а лвĭ 6, апроапе кв о a doъ-zeчелеа. În adeвър, fie x mediea, вом авеа $1 : x :: x : 6$; de вnde $x^2 = 6$; ші $x = \sqrt{6}$.

3° Ачest прінчіп sлвжеште ла mъsвpaрea пвтеріĭ чеntpifвце în mішкареа кврвілінъ. Însъ noĭ нв вом intpa întp'ачeastъ teopie кape не depъpteazъ преа mвлt de dpвmвл nostpв, чĭ вом tpimite пе чіtitopiĭ noштpi ла diвеpselе tpaktatвpĭ de fisiкъ.

(Теоріеа n° 84, 85.)

99. Ачeste teopeme sînt tpeбвінчioase пеntpв pesолвцieа внеĭ mвлцimĭ de проблеme asвпра черквлвĭ.

(Teorika n^o 86).

100 Ачest прінчіп dъ прічінъ ла шѕлte апліkaцiї însemnate.

Пъmîntѕл fiind o sѕпрafaцъ sferікъ (Fig. 75), de вom dѕче прin окiѕл O ал ѕнѕї observator че se afлъ вертікал пе пъmînt o tanцentъ Ot ла ѕнѕл din черкѕріле sале челе mapї, пѕнкtѕл de atinцере t ва fi хоtарѕл веdepiї observatорѕлѕї în планѕл ачеstѕї черк; пentpѕ къ este înвеdepat къ нічї o разъ лѕminoasъ нѕ поate ажѕнце ла observator dintp'ѕн пѕнkt i че s'ар afла sѕбt пѕнktѕл t, de нѕ ва пътрѕнde прin пъmînt; аша dap пѕнktѕл i este невъzѕt; în време че nimik neîndpentîndѕ-se întpe окiѕ шi difepiteлe пѕнktѕрї але аркѕлѕї Pt, ачеsta este въzѕt întpeг. De вom înвîрti аркѕл Pt împрежѕрѕл пѕнktѕлѕї P, ва pesѕлta dintp'ачеasta o sѕпрafaцъ чіркѕларъ каре ва fi opizontѕл пъmîntesk ал observatорѕлѕї; daka Pt este de 8000 metpe, вom ziче къ веdepea se întinde de 8000^m împрежѕр.

Dѕпе ачеasta, de am fi кѕnoskѕt înълцimea окiѕлѕї observatорѕлѕї d'asѕпра пъmîntѕлѕї de nіво шi distanца че поate веdea împрежѕр, am fi пѕtѕt konkide dintp'ачеasta diametpѕл пъmîntѕлѕї. În adeвър, înълцimea окiѕлѕї шi întindepea веdepiї fiind mediokpe, аркѕл Pt шi tanцenta Ot нѕ se вор deoseбi mѕлt, шi se ва пѕtea лѕа ѕна пentpѕ алta. Daka dap авem $OP = 8^m$, $Pt = 10000^m$; sekanta OR ва fi a tpeia пропорцioналъ întpe 8 шi 10000; чеea че ва da $OR = 12500000^m$; din каре skъzînd OP, вom авеа пentpѕ pest diametpѕл пъmîntѕлѕї.

Ачest metod, imaцinat de Маѕроліkѕs, este ne-

ексакt în практікъ, din пrічіna гревтъції вnеї determinaції ексакtе а хоtарвлвї ведеріі, însъ вом face проблема маї folositoape întорkînd-о.

Поаtе sъ se чеаръ а se afла întindepea ведеріі пе лвчівл търіі, înълціmеа окївлвї dîndв-se d'asвпра sвпрафеції. Zік пе лвчівл търіі; пеntрв къ нвмаї о ast-feл de sвпрафацъ se поаtе konsidepa ка fъкînd о парtе din ачееа а глобвлвї; пеноtpiвіріле пъмîntвлвї неерtînd а'ї da fоpма sfepікъ de kît întр'о маре întindepe. Кvноаштем кв пречisie diametрвл mediв ал глобвлвї. Аша dap авем чеї doї търцінаші аї вnеї пропорції, ал кърііа медівл este tanцenta, saв, каре este tot ачееа, distanцa неквnoskвtъ P*t*, ла каре окївл поаtе ведеа. Fie PO=2'''. Авем OR = 12732 400; de вnde

$$2 : x :: x : 12732400,$$

каре не dъ $x = 5046'''$, saв чінчї sfepтвpї de міл апроапе. Ачеаsta este distanцa ла каре поаtе ведеа пе лвчівл търіі, вn окїв înълцаt de доъ metpe маї sвs de sвпрафаца sa.

Віче верsa пvнкtвл *t* este ачела din каре вn окїв, пвs пе sвпрафаца търіі, ар înчепе sъ ваzъ вîрfвл О ал înъlцimеї вертікале PO. Кв kît окївл înainteazъ пе аркв *t*P, ел zъреште маї мвлtе пvнкtвpї d'але înъlцimії PO; în K, sпре ексемплв, веде toатъ партеа OS, пvнкtвл S fiind dat de tanцenta KS dвsъ ла пvнкtвл K. În sfîршіt, ворбind pігвpos, ел пв поаtе ведеа пvнкtвл P маї 'nainte de а'л atinцe.

Dap челе доъ іпоtese пречеdente sînt маї нвмаї înкіпвіtе; вn окїв пв se afлъ нічї о datъ ла sвпрафаца вndeї, ші обіекtеле възвtе пе лвчівл търіі пв se пот asемъна кв ніште simплe пvнкtвpї.

Din прічіna sfepiчitъцiї тъpiї, обiеkteле възъte de depapte, прекът коръбiiле, înfъцiшеаzъ întîїъ обsерваtорълъї, înaintînd spre dînsъл, вîрfъл katарtърілор лор; шi пробlema, ка sъ fie folosiтoape, требъе sъ se поатъ deslега sъбt aчеаstъ формъ: окiъл aflîndъ-se ла о înълцimе, spre eksемплъ пе podiшоръл de ла katаptъл ъnеї коръбiї de ъn оаpeкаpe opdin, ла че distanцъ поаte вedea ъn пъnkt dat, spre eksемплъ podiшка de ла katаptъл ъnеї алte коръбiї.

Daka пъnktъл O (Fig. 76) pепpesintъ posiцiea окiълъї, шi вizеazъ ла podiшка de ла katаptъл ъnеї коръбiї de aчелашї opdin, sinгъpъ inspekцiea fiгъpеї не faче sъ înцелецем къ aчеasta se ва вedea ла о îndoitъ de Pt. De авем PO = 14^m, aflъm ка maї sъs пе Pt = 13351^m; distanцa къъtatъ ва fi dap 26702^m.

Daka пъnktъл вizat nъ este ла înълцiшea окiълъї, чepepеа se компъne de detepminapea a doъ tanцenте, пе kape ле aflъm tot къ kiпъл aчела. Fie K вîрfъл katарtълъї ъnеї коръбiї. Ел se ва вedea nъmaї kînd, dъпe о miшкаpe чipкълapъ a коръбiї, ва intpa în h în tanцenta OtS. Ръmîne atъnчї sъ калкълъm челе doъ tanцente tO, th; sъma лор, kape se поаte tot d'аъna sъпъne екъалъ къ aчееа a doъ аркъpї, ва fi distanцa къъtatъ.

Eksемплъ калкълълъї.

Окiъл aflîndъ-se пе ъn katаpt, ла 14^m de înалt, ла че distanцъ ва îнчепе ел sъ вazъ вîрfъл чел maї înалt ал мъnteлъї Atos, de 2066^m maї sъs de niво?

Noĭ гъsim întîĭȣ пentpȣ tanцenta dȣsъ пpin okĭȣ, 13351^m; пentpȣ чea dȣsъ din вîpfȣл mȣnteлȣĭ, ea ва fi o шedie întpe 2066 ші 12732500 + 2066; aflъm dȣпe че вош sъвîpші aчeste калкȣле, 163124, каpe, кȣ валоаpea 13351 a челеĭ d'întîĭȣ tanцente, dъ 176475^m (44 леге) пentpȣ distanцa челор доъ estpemitъцĭ але tanцenteĭ întpeцĭ. Însъ sȣma челор доъ аpкȣpĭ, каpe авіa face ȣn гpad ші жȣmъtate, кȣ пpea пȣцin se deosiвeшte de aчeasta. Пȣtem dap ziче къ окĭȣл, че se aflъ ла о înълцime de 14^m, înчепe a вedea mȣnteле Atos кȣ 44 de леге depъptat de пpoieкціea вîpfȣлȣĭ sъȣ̆.

Tot кȣ кіпȣл aчesta вom afла къ окĭȣл, aflîndȣ-se ла înълцimea пpeчedentъ, поate вedea вîpfȣл Кішвоpasȣлȣĭ, înaлt de 6530^m, întp'o distanцъ de 288420^m (72 леге).

Кȣ кіпȣл aчesta aflъm în че distanцъ de ла цъpm ȣn fap împpъштie лȣmina sa, ші віче вepsa navigatopȣл поate кȣпоаште кît este depapte de цъpm, кînd înчепe sъ вazъ fокȣл ȣпȣĭ fap, de o înълцime кȣпоsкȣtъ. Челеврȣл fap ал Алеksandpieĭ se вedea de o sȣtъ miле пе mape (37 леге metpiче) dȣпe apъtapea лȣĭ Stpaвon. Din nenopoчipe, înълцimea окĭȣлȣĭ пȣ este apъtatъ, ші аша пȣ пȣtem da deкît пȣmaĭ niште sлаве пъpepĭ despre înълцimea aчestȣĭ monȣment.

(Teoriea n^o 88).

101. Pesȣлtъ dintp'aчeastъ teopeшъ impoptantъ къ papoptȣл ȣпеĭ чіpкonfepinцe oape-каpe кътpe diametpȣл sъȣ̆ este espprimat npintp'ȣn пȣmъp ȣпік, paцionaл saȣ̆ пȣ. (V. Teopiea n^o 112).

Maĭ пѫtem калкѫла, dѫпе ачest прінчіп, кѫ кît лініеа фъкѫtъ кѫ крештetѫл капѫлѫĭ ѫпѫĭ om каре ѫmблъ este maĭ лѫпгъ de кît dрѫmѫл че фаче кѫ пічіоареле лѫĭ. Fie x чірконферінца deskpisъ de капѫл ѫпѫĭ om каре ар фаче înкѫпжѫрареа пъmîntѫлѫĭ; чірконферінца deskpisъ de пічіоареле лѫĭ фіінd atѫпчĭ de 40000000^m, раза пічіоарелор ва фі 6366200^m, іар ачееа а челѫĭ фъкѫt кѫ капѫл 6366202; dînd doъ metpe de înълціme пînъ în крештet, вom авеа dар пропорціеа:

$$6366200 : 6366202 :: 40000000 : x:$$

de ѫnde skoatem $x = 40000012^m,6$. Аша dар капѫл а фъкѫt 12^m,6 maĭ mѫлt de кît пічіоареле. Dака omѫл ва ѫmбла пѫmaĭ o легъ, dіферінца ва фі пѫmaĭ de ѫn мілімetpѫ ші ѫn sфept.

ПАРТЕА II.

DESПРЕ SѪПРАFЕЦЕ.

(Теоріеа n^o 101—111).

102. Este лesne de înцелes къ ачeste d'întîĭ пропосіції sînt de чea maĭ маре імпортанцъ. Мъсѫра сѫпрафецелор пѫ este сѫбt ачest рапорt maĭ жos de кît мъсѫра ліпіілор, ші, кѫ toate къ евалѫаціїле сѫперфічіале konstitѫesk арta спечіалъ а арпеntорѫлѫĭ, se афлъ însъ афаръ din ачeste лѫкрърĭ o мѫлціme de каze în каре teopiea ачeasta este требѫінчіоasъ ла toatъ лѫmea. Noĭ вom da maĭ

тȣлte екsемпле maĭ 'nainte de a esпȣне пречisa noastpъ de toasat ші de apпentaцiȣ.

Екsемплȣ întîiȣ.

Se пропȣне a încерка soлiditatea ȣнȣĭ nod sȣsпendat, a nodȣлȣĭ Inвaлiziлор, sпре екsемплȣ.

Черерea ажȣнџе înвedepat ла ачеasta: nodȣл sȣпȣindȣ-se a пȣрta чел maĭ mape нȣмър пȣtinчios de oamenĭ, вa fi oape în stape de a 'ĭ џine пе ȣн timп dat, doъ-zeчĭ ші patpȣ de ope, sпре екsемплȣ?

Ка sъ ръsпȣndem ла ачеasta, noĭ вom мъsȣpa sȣпpafaцa nodȣлȣĭ, ші вom вedea кіџĭ oamenĭ de o гpeȣtate кȣnoskȣtъ поate лȣa. Ел este ȣн dpentȣнгiȣ de $117^{m},8$ de лȣнг, пе $8^{m},1$ de ларг; sȣпpafaцъ $117,8 \times 8,1 = 954^{mm}18$. Ȣн metpȣ пъtpat поate лȣa 6 oamenĭ пpea înгreȣiцĭ; аша dap nodȣл вa лȣa $954,18 \times 6 = 5725$ oamenĭ, каре кîte 75 кiл. пentpȣ гpeȣtate de miжлок, вор faче 429375 кiл. пentpȣ максimȣm înкъркътȣpiĭ че nodȣл se поate înгpeȣia кȣ oamenĭ. Нȣ ръмîne dap de кît a înкърка nodȣл în вpeme de o zi de гpeȣtъцĭ пînъ ла împлinipea de 429375 кiл. вapiind амъzapea. Пȣtem faче ȣн калкȣл аналог пentpȣ максimȣm înкъркъркъtȣpeĭ în tpъsȣpĭ.

Екsемплȣ ал doiлea.

Кîtъ келtȣiaлъ вa tpeбȣi пentpȣ zъгpъвitȣл лemпъpieĭ ȣнȣĭ saлon, кîte $1^{f},25$ пе metpȣ пъtpat?

Лemпъpiea, копрinde ȣшiле ші fepestpeле, каре sînt în џенерал dpentȣнге але кърора dimensiĭ tpe-

бѹе сѫ ле шъсѹрът, ші а кърор продѹс, іммѹлціт прін $1^f,25$ ва аръта келтѹіала требѹінчіоасъ.

Fie дар de $0^m,90$ înълціmea лешпърii, копрінzîndѹ-se întp'ачеаста desболтареа шѹлѹрелор; лѹнціmea sa în чеа маĭ прінчіпалъ demensie а салонѹлѹĭ, de $5^m,70$, ші în чеа маĭ мікъ de $3^m,25$; skoцînd d'întîiѹ іnтерѹпціїле, прекѹм ѹшĭ, fерестре, шемінееле, вом іммѹлці 5,70 прін 0,90 каре дъ $5^{mm},13$ саѹ $10^{mm},26$ пентрѹ amîndoъ fецеле опѹсе. Продѹсѹл d'ал doiлеа $3,25 \times 0,90 = 2^{mm},925$, fiind îndoit, дъ $5^m,85$, ші адъогат ла пречеdентѹл, резѹлтъ din-tp'ачеаста $16^{mm},11$ пентрѹ сѹпрафаца totалъ а лешпърii.

Dintp'ачеастъ валоаре, требѹе сѫ skoatem пентрѹ шемінеѹ ѹн дрептѹнгіѹ de $2^m,10$ пе 0,90 саѹ $1^{mm},89$; рътîne $14^{mm},22$; ші сѫ адъогъм доъ ѹшĭ дрептѹнгіѹларе de $2^m,55$ înалте кѹ тѹлѹреле первазелор, ші лате de 1,35, каре din прічіна челор доъ fеце даѹ $4\ (2,55 \times 1,35) = 13^{mm},77$; ші кѹ челе патрѹ дрептѹнге інтеріоаре $4\ (2,10 \times 0,5) = 4^{mm},20$; totалѹл ѹшелор, $17^{mm},97$, ші кѹ $14^{mm},22$ аfлате = $32^{mm},19$. Este о інтерѹпціе de доъ fерестре; dînd skелеtелор чеea че se skade de ла лешпъріе, вом адъога пентрѹ облоане, але кърора челе доъ fеце fак опт дрептѹнге de $1^m,80$ пе 0,60, продѹсѹл $1^{mm},08$, іммѹлціт прін 8, даѹ $8^{mm},64$; totал кѹ пречеdентѹл $40^{mm},83$.

Прецѹл ва fi дар $1^f,25 \times 40,83 = 51^f,04$.

103. Tot кѹ кіпѹл ачеста вом калкѹла кîтъ хîртіе zѹгръвітъ не требѹе ка сѫ акоперім ѹн spaчіѹ dat. Вълѹл de хîртіе este о сѹпрафацъ дрептѹнгіѹларъ апроапе de 8^m лѹнгъ пе 0,5 латъ, калкѹлатъ

ка sъ акопере eksakt o toasъ пъtpatъ. Se поate sъпosa de patpъ metpe пъtpate, ast-feл în kît, împъpцind пpin 4 sъпpaфaцa totaлъ kape tpeбъe aштepпъtъ, вom aвea пentpъ kît пъmъpъл вълъpiлop tpeбъinчioase.

Eksemплъ aл tpeiлea.

Boim sъ kъпoaштem апpokсimatiв пpodъkцiea ъпъї лok semъпat kъ kaptofї.

Dateлe чepepiї sînt: 1° kъ keлtъeлeлe kълtъpeї sînt шase a zeчea din пpodъsъл бpъt; 2° kъ пpodъsъл de miжлok este de 280 ektoлitpe de ektap; 3° kъ пpeцъл de miжлok aл вînzъpiї este de 4 фpanчї ektoлitpъл.

Figъpa лokълъї (Fig. 77) este ъn tpaпez kape se пoate deskomпъne în tpiъnгe; însъ вom лъa maї бine жъmъtatea sъmeї бaseлop $\frac{175+78}{2}=126^m,5$, шi вom îmmълцi kъ înълцimea 54, чeea чe пe вa da 6831 metpe пatpate пentpъ sъпpaфaцa лokълъї.

Însъ, ektapъл de 10000^{mm} пpodъчe 280 ektoлitpe; daka dap вom aштepne 10000 : 280 :: 6831 : $x=$ 191,27 ektoлitpe; aчest din ъpmъ пъmъp fiind îmmълцit пpin 4, вom aфлa $765^f,08$, вaлoape kape pedъsъ de $\frac{6}{10}$, вa da $306^f,032$ пentpъ пpodъsъл kъpat aл лokълъї semъпat kъ kaptofї.

Пъtem фaчe kaлkълe aпaлoaцe пentpъ гpîъ, opz, oвъz, лeгъme, пoame, ш ч л.

Пречise despre stînжinitѕл ѕѕпрafeцелор.

104. Nѕmesк *a stînжini* apta de a mъsѕpa ѕѕпрafeцеле кapе компѕп клъdiріле шi локѕріле împрежmѕite. Ачeastъ mъsѕpape este nечesapie apшitектѕлѕї, stъпîniлор шi кeap mешtepiлор, шi maї mѕлt stînжinaріlор веpiфiкatopї. Ачeштї din ѕpmъ sînt datopї a face, dѕпе ачeste mъsѕpї, stapea локѕpiлор, евалѕaцiea келtѕелелор, плата dѕлгepii, zѕгpъвii, лiпitѕлѕї, napdositѕлѕї, павацiѕлѕї, înвълiшѕлѕї, шчл. În sfîpшit, eї sînt însъpчiнaцї, ка împрeѕпъ кѕ apшitектѕл sъ факъ планѕл клъdiрiлор.

Sкoцînd пpinчiпеле de meseрie asѕпра прeцѕpiлор ѕnimiлор лѕкpѕлѕї fie-къpѕia feл, asѕпра фачepiї шi pîndѕipiї meмopiiлор, шi asѕпра înвоелелор кapе aѕ de sкоп pedѕчеpea amъpѕnteлор, naptea кѕpat teopetiкъ, saѕ mъsѕpatѕл пpoпpiѕ, deпinde de пpinчiпеле че am apъtat aiчї maї sѕs, шi despre кapе am dat mѕлte eкsempле. Nѕ пe maї pъmîne a maї ziче nimiк despre ачeasta, afapъ пѕmaї de вом вoi sъ фачем ѕп tpaктat sпeчiaл.

Кѕ toate ачestea вом maї da шi алte eкsempле de калкѕл, пѕmaї ка sъ повъцѕim пe onepatopiї кapе вор stъpѕi, лѕкpѕ пpea des, a se sлѕжi кѕ mъsѕріле векї, stînжinї, палme, деџete шчл. Dѕпе короларѕл (*n°* 93) шi eкsempлеле date, nѕ пe maї pъmîne nimiк a ziче пentpѕ întpeбѕinцapea sistemeї meтpiче челеї поѕъ, atit de лesne пentpѕ simплitatea sa. În чел-лалт kaz, fie-кapе евалѕaцie de sѕпрafaцъ deпinde de ла пpodѕsѕл a doї фактopї a desea пpea комплeкsi; însъ, aiчї se înfъцiшъz mѕлte гpeѕтъцї: 1° кѕноштiнца peгѕлeї de ѕpmat; чeea че че-

pe ꙋn stꙋdiꙋ̆, ші прінчіпеле нꙋ sînt tot d'aꙋna famіліере операторꙋлꙋ̆; 2° лꙋнцімеа лꙋкрꙋлꙋ̆; 3° грешелеле че se пот stрекꙋра каре кꙋ atît sînt maĭ мꙋлte кꙋ кît калкꙋлеле sînt maĭ лꙋнџĭ. Toate aчеste înкꙋркътꙋрĭ sînt nedesпърцite de stînжinіреа проприе zisъ; dар fiind къ ачеаstъ рꙋtinъ este преа întinsъ, вом аръta регꙋлеле, saꙋ̆ maĭ віne регꙋла ꙋnікъ а калкꙋлꙋлꙋĭ че noĭ sfътꙋim а ꙋрша în kazꙋл ачеstа.

Fie ꙋn dрепtꙋnгіꙋ̆ кꙋ базꙋл de $5^{s}-4^{п}-5^{d}-8^{л}$, ші înълцimea de $8^{s}-2^{п}-9^{d}-5^{л}$. Stînжinарії întребꙋinцеазъ ка sъ mъsoаре ачеаstъ sꙋпрафацъ dіверse metoade. Чел шаĭ întребꙋinцat este аналог кꙋ îmmꙋлцірea комплексъ; se поate bedea ꙋn шодел în Арітmetікъ.

Регꙋла noastръ konstъ а редꙋче tot în лініĭ, daка лініеа este фракціеа чеа maĭ mікъ, ші sъ фачеm продꙋsꙋл челор доъ dimensiĭ але dрепtꙋnгіꙋлꙋĭ, чееа че ва da sꙋпрафаца în лініĭ пътрate. De вом îmпърці ачеst нꙋmър прін 100, нꙋmърꙋл лініілор копрinse întр'ꙋn deцеt пътрат, кîtꙋл ва fi deцеte пътрate; ачеst кît îmпърціt кꙋ 100 ва da, pentrꙋ ачелашĭ кꙋвînt палше пътрate; în sfîршіt îmпърцind ачеst din ꙋрmъ resꙋлtat прін 64, нꙋmърꙋл палmелор копрinse întр'ꙋn stînжin пътрат, вом авеа stînжinіĭ, палmеле, deцеteле ші лініiле пътрate че копрinde dрепtꙋnгіꙋл пропꙋs.

În kazꙋл ачеsta, базꙋл de 5^{s}, $4^{п}$, $5^{d}-8^{л}$ se skimбъ în 4458 лініĭ; înълцішеа de $8^{s}-2^{п}-7^{d}-5^{л}$ deвіне 6695 лініĭ; продꙋsꙋл ачеstор доъ нꙋшере este 29846310 de лініĭ пътрate.

Îmпърцind прін 100 афлъm 298163 deцеte пътрate ші 10 лініĭ ръшъшіцъ; нꙋmърꙋл 298463 îm-

пърцit прin 100 dъ 2984 палте шi 63 deцеte ръ-тъшiцъ; în sfîршit, 2984 împърцit 64 dъ 46 stîn-жiпї пътрацї шi 40 палте ръттъшiцъ. Аша dар sв-прafaцa dpentвпгiвлвї este de 46^{s}—$40^{п}$—63^{d}—$10^{л}$.

Dвпе sistema чеа новъ, toate se вор pedвче ла îmmвлцiреа а 11^{m},198 прin 16^{m},551, каре dъ 185^{m},318. Sъ компаръm ачеаstъ siшплъ операцiе кв твлцimea челор че tревве sъ fачет кв шъsвpiле челе векї.

105. Noї рекоmandъm metodвл de sвs, ка maї преfераsiл de кît ор-каре алt пentрв simпличitatea sa. În sfîршit eatъ о tавлъ de rапоарtеле шъsвpiлор векї sвпрafeцiале кв челе новъ шi вiче верsa. Еа поаtе слвжi ла tradвкцiea peзвлtatелор калквлелор doвîndite întр'о sistemъ în валоаре кореsпвпzътоаре în чееалалtъ sistemъ.

Вп stiжin пъtpat вpeцвeшte		3^{mm},84944
о палтъ пъtpatъ	—	3,84944 dечimetpe пъtpate
вп deцet пъtpat	—	3,84944 чentimetpe пъtpate
о лiniе пъtpatъ	—	3,84944 miлimetpe пъtpate
вп metpв пъtpat	—	0,25978 stinжin пъtpat
вп dечimetpв пъtpat	—	0,25978 dечi-stinжinї пъtpaцї
вп чentimetpв пъtpat	—	0,25978 чenti-stinжinї пъtpaцї
вп miлimetpв пъtpat	—	0,25978 miлi-stinжinї пъtpaцї.



ПРЕЧІSE DE АРПЕNТАЦІЙ.

106. А тъсꙋра царініле, а ле імпърцї іntр'ꙋн рапорt черꙋt, ші а ле рідіка плапꙋл, ачеstea sînt diверsеле обіекtе че ni se пропꙋп ïn арпентацїꙋ. Noї nꙋ не вом maї întoapte ла чea din ꙋрmъ парte; чі вом tракtа, saꙋ maї біne не вом sіли а іsпръві de а tракtа пе челе-лалtе doъ.

§ I. МЪSꙊРА SꙊПРАFЕЦЕЛОР.

Dака sꙋпрафецеле de тъsꙋраt sînt dpentꙋnге, tріꙋnге saꙋ tрапеzе, nꙋ maї авеm nіmік sъ adъогъm ла челе че s'а zis пentpꙋ mъsꙋра ачеstоp fелꙋрї de fігꙋрї. Dака sꙋпрафаца este ꙋn черк, teopema 6, ші n^{o} 117 че ва ꙋрmа, пресkрїꙋ tot че треbꙋе sъ fачем întp'ачеst каz. Ne ръmîne а еksamina mъsꙋрареа полігоапелор nерегꙋлаtе, ші а sꙋпрафецелор кꙋрвіліne.

1° Sъ sꙋпꙋnеm ꙋn полігоn dpent-ліniat nерегꙋлаt. Пꙋtem tot d'аꙋnа, прin ажꙋtорꙋл коарdелор dꙋse diагоnал dintp'ꙋnꙋл din вîрfꙋріле sале ла toate челе-лалtе, sъ 'л desпърцim în tріꙋнгꙋрї, кърора вом евалꙋа în парte sꙋпрафецеле прin mіжлокꙋл кꙋnоsкꙋt. Sꙋma ачеstор sꙋпрафеце ва da пе а полігоnꙋлꙋї toтал.

106. Біs. Însъ а desea întреbꙋinцъm în арпеnтацїꙋ ꙋn алt mіжлок ка sъ mъsꙋръm полігоапеле. Dꙋчем о diагоnалъ *b*K кат прin mіжлокꙋл полігоnꙋлꙋї, ші коборîm din diверsеле sале вірfꙋрї перпеndікꙋларе пе ачеst баs комꙋn. Dintp'ачеаsta ре-

вълїъ вn пътър оаре-каре de їрапеzе, ші кїїе-ва їрївнгїврї estpeme. Afлът în napte въпрафецеле fieкървїа ші въта лор компвне въпрафаца полігонвлвї. Ачеst шоd se креde maї esneditif de кїt пречеdentвл.

107. Ne слвжїm пentрв коборїївл перпеndiквларелор кв вn instpвment каре їмплїнеште кв аванtацїв локвл коарделор че adesea nв se not întpeввinца ла царїнї марї (Fig. 80). Ачеst instpвment каре se пвмеште екер de арпентор, este о кvtie de аламъ, пе вn пічїор ка графометрвл, ші доъ sisteme de пінвле але кърора dipeкцїї se tae în вnгїв dpent. Dака îndpenїъм вnа dintр'ачеste доъ віziepe пе оаре-каре лініе, а doa ва аръtа лініеа перпеndiквларъ пе ачеаstа. Ачеst instpвment ne ва слвжї dap ка съ двчем перпеndiквларе пе пъмїnt. Însъ de воim съ коборїm dintр'вn пвнкт dat A (Fig. 79) о перпеndiквларъ Am пе лініеа Kb, пвnem instpвmentвл nostpв пе Kb, maї пе пвнкївл че am креde къ ар fi пічїорвл перпеndiквларeї, ші пвind întiea віziepъ пе Kb, овсервъм dака а doa тpече пpin пвнкївл A. Ачеаstа se întimплъ, пpea pap ка съ неmepim ла întiia înчеркаре, însъ въгъм de seamъ кam кв кїt пвнкївл A este депъртat de перпеndiквларъ; мвїъм екервл maї înainte, ші pепеїъм înчеркареа. Кв пвцінъ денpindepe, арпенторвл îndaїъ dъ neste пвнкївл A, ші atвnчї instpвmentвл se afлъ în пвнкївл къвtat m. Мъсвpim лініеа Am, ші о шъсвръм кв ланцвл.

Adesea se întimплъ къ ка съ коборїm перпеndiквлареле съ нв не пвtem слвжї нічї кв sfoapa нічї кв екервл: ші ачеаstа se întimплъ кїnd тpівнгївл саў

поліgonвл de шъsвpat este o sвпрafaцъ акоперітъ парte de кpînг sпре ексеmплв. În каzвл ачеsta, tребве sъ pidiкъm плапвл пъdвpiï dвпе квm am аpъtat ла (*n*° 82), шi sъ mъsвpъm кв гpiжъ în fiгвра panoptatъ пе xîptie, dimensiiле че n'am пвtвt mъsвра пе пъmînt.

108. Преа des se întîmплъ ка sвпрafaцa локвлвi sъ нв fie планъ, шi sъ копрinzъ mвлte nenotpiвipï. Eatъ че fачеm întp'ачеst каz.

Дака локвл нв se mъpцineшte пріп лiniï dpente, tребве sъ 'л înкidem кв шъеце ast-feл în кît sъ fie копрins întp'вп поліgon dpent лiniat. Pidiкъ плапвл ачеstвï поліgon ка maï sвs, шi шъsoapъ sвпрafaцa sa пе xîptie. Пpin ачеаsta веï квпоаште toatъ копрindepea поліgonвлвï de пе пъmînt. Веï sкоаte dintp'ачеаsta пъpцiле ажвtъtoape пе каpe лiniiле mъeцiлоp аў adъogat ла sвпрafaцa pimitiвъ, шi каpe maï în цеnepaл вop fi nіште mічï tpiвнгe лesne de шъsвpat.

Însъ лesne se квпоаште къ пpin ачеst miжлок, вom авеа нвmaï sвпрafaцa пpoiекцii opizontaле a локвлвï, пpoiекцie каpe поаte fi кв mвлt maï шiкъ de кît sвпрafaцa pеaлъ. Ачеаsta este npea adевъpate, însъ metodвл în цеnepaл нв dъ nічï o грешалъ. În adевъp, ачеste mъsвpï se iaў нвmaï ка sъ евалвъm пpodвseле вецetaле але локвлвï. Dap maï toate пpodвseле ачеstea, пpeквш череалеле шi fînвл, кpesк вeptiкал, ка кînd 'шï ap авеа pъdъчіnеле пе пъmîntвл opizontaл пе каpe se aflъ amezat пъmîntвл înклinat, шi este dовedit къ atвнчï нв sînt nічï maï dese nічï maï papï de кît дака ap fi fost sъdite пе пpoieкцiea opizontaлъ a локвлвï лop. Аша dap tpe-

бзе sъ евалзъm sзпраfаца ачеstеї проїекції, прекзm о fачеm прiн ачеst metod.

Кз toate ачеstea sînt зпеле каzе în каре tребзе sъ шъsзръш sзпраfаца реалъ. Ербзріле skзрte, sпре екsemплз, каре нз креsк верtікал, daŭ зн продзs шаї пропорціонал кз sзпраfаца, шi келtзеле de îнгръшаt шi гінs че fак пе ачеste локзрї sînt tot întр'ачеst каz. Аша tребзе sъ mъsзръm sзпраfаца реалъ, шi sпре ачеаsta о deskomпзнеm în mічї пърції каре sъ fie біне плане. Маї mзлta saŭ шаї пзціна екsаktitate а ачеstзї шod депінде de ла iskзsінца операtорзлзї.

109. 2° Sъ sзпзнеm къ se чере а mъsзра зн лок план, de fормъ кзрвілінъ. Întребзінцъm, ка sъ ажзнцеm ла ачеst skoп, doъ modзрї прінчіпале. Desпърціm конtзрзл кзрвілін în пърції atît de mічї în кît sъ fакъ лінії dрепte, шi dзпе ачеаsta desпърціm полігонзл în tрізнгізрї, dзпе обічеїз, saŭ în tрапеze, коборînd din estpemitъціле ачеstор dіверsе арче dреnt-лініаte перпендікзларе пе о лініе tрансверsалъ каре репреsenтъ dіагонала fігзреї пречеdente. Ачеst mod чере о лзкраре преа лзнгъ (Fig. 78).

Modзл ал doiлеа каре este кз mзлt шаї skзрt, коnsіstъ întрз а adзче лінії dрепte каре sъ tae конtзрзл локзлзї, ast-fел în кît пърціле adъогаte sъ fie maї екзале кз пърціле лепъdate, прекзm se веде în fігзра 82. Atзнчї împърціm, dзпе обічеїз, полігонзл în tрізнге нз преа mзлte. Ачеаstъ fігзръ, преа перегзлаtъ, se skimбъ întр'зн simплз октогон, шi авеm пзціне tрізнге de mъsзраt.

Dака інtеріорзл fігзреї кзрвіліне (Fig. 84) este неакчеsібіл, каре se întîmплъ кînd sînt мочірле, бълції

ші алтеле, нѕ пѕtem faче аvеste tріѕнгюрї. Atѕнчї трeбѕе sъ pidікъm планѕл поліgonѕлѕї ast-fел însemnat, ші sъ мъsѕръш sѕпрafaцa пе xîptie. Dap se поate întîмпла ка sъ нѕ пѕtem dѕче аvеste лінії dpепte, локѕл fiind акоперit ші непенеtрабіл de лапц; atѕнчї вom faче ѕн поліgon esteріор (Fig: 81); вom pidiка планѕл аvestѕї поліgon; ші, dѕпе афлареа мъsѕреї sале пе xîptie, вom sкоate dintр'ачеаsta пърціле че нѕ цin de sѕпрafaцa кѕрвілінъ, ші пе каре ле пѕtem мъsѕра пе пъmînt.

110. Пentpѕ мъsѕрареа поліgoанелор регѕлаte пе пъmînt, нѕ авem алтъ греѕtate de kît нѕmaї de а ле гъsi апоtеша, кînd inteріорѕл este неакчеsiбіл (Fig. 83). Eatъ кѕm ажѕнцem ла ачеаsta.

Dака поліgonѕл este de opdinъ кѕ soц, вom прелѕнці din afaръ, прin sfopї, doъ din лаtѕреле опѕse, *ab*, *Km*, ші вom dѕче din afaръ о перпендікѕларъ комѕнъ *ch*, каре ва fi апоtema îndoitъ. Dака поliгonѕл este de opdinъ fъръ soц, трeбѕе sъ pidiкъm планѕл ші sъ мъsѕръш апоtema пе xîptie, каре se поate faче pidiкînd întîiѕ doъ перпендікѕларе în міжлокѕл а doъ лаtѕре; пѕнкtѕл лор de intepsекціе ва fi оріціна апоtемеї. Însъ ар fi маї бine sъ алергъm ла modѕл de ла *n*°. 120.

111. Bom лъsа пentpѕ алт нѕмър чеeа че se аtinцe de черк ші еліпs, ші вom isпръвi аvest пречis кѕ esпѕнереа ѕнѕї metod преа important пentpѕ мъsѕраtѕл tріѕнгюлѕї. Преа des se întîмплъ sъ нѕ пѕtem кобоpî перпендікѕлареле пе бас, din прічіна мѕлцімеї de staбіле че se опѕн ла мішкъріле sfoapeї; ші нѕ пѕtem tot d'аѕна îmплini ачеаsta кѕ о pidiкаре de план, каре чере instpѕmente ші кѕно-

шtiинце каре поаte нѕ ле авеm. Însъ ачеastъ греѕtate înнеdiкъ тъѕѕра maĭ a tѕtѕлор ѕѕпраfецелор, пеntрѕ къ ле deskomпѕн în tрiѕнгiѕрĭ. Miжлокѕл ѕршътор înлеsнеште ачеastъ греѕtate, ла tрiѕнгiѕрiле але кърор латѕре sint акчеsiбiле. Мъѕѕрът кite треле латѕреле, шi калкѕлът ѕѕпраfаца кѕ ачеste треĭ латѕре прiн ажѕtорѕл formѕлеi

$$S=\sqrt{\frac{p}{2}\times\left(\frac{p}{2}-a\right)\times\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

în каре a, b, c, репреsintъ челе треĭ латѕре але трiѕнгiѕлѕĭ; p перimetрѕл ѕъѕ, ѕаѕ ѕѕmа латѕрелор; S ѕѕпраfаца трiѕнгiѕлѕĭ. Ачеastъ formѕлъ, кърiia нѕ пѕtem da aiчĭ demonstраціе, шi каре требѕе бiне шtiѕtъ, se traduче ast-fел:

Din жѕmътаtea ѕѕmeĭ кitор треле латѕре але ѕнѕĭ трiѕнгiѕ, skade ѕѕкчеsiв ачеste треĭ латѕре; îmmѕлцеште челе треĭ реstѕрĭ intре еле, шi продѕсѕл лор прiн ачееашĭ жѕmъtаte de ѕѕmъ; estраце ръdъчiна пътраtъ; шi ачеаsta ва fi ѕѕпраfаца трiѕнгiѕлѕĭ. Аша н'авеm нiчĭ de кѕm требѕiнцъ de înълцimea sa de каре не пѕtem лiнsi.

Еksемплѕ de калкѕл.

În трiѕнгiѕл (Fig. 82), авеm пе $a=186$, пе $b=167{,}5$; пе $c=211{,}2$; $p=564{,}7$; $\frac{p}{2}=282{,}35$; $\frac{p}{2}-a=96{,}35$; $\frac{p}{2}-b=114{,}85$; $\frac{p}{2}-c=71.\ 15$; de ѕнde....

$S = \sqrt{282{,}35 \times 96{,}35 \times 114{,}85 \times 71{,}15} = 14909^{mm},84.$

Ші кеар кînd нічї о stавілъ нв не ар опрі sъ лвъm înълцimea внвї tрівнгів, ар tребвi sъ преферъm întребвінцареа ачеstвї metod, пенtрв къ латвреле se mъsор tоt d'авна maї лesne de кît перпенdiквлареле, резвлtatвл ва fi maї ексакt.

§ II. Împърцірea царінілор.

112. Ка sъ împърцim пропріеtъціле църъпешті în пърцї еквале, saў în оаре-каре рапоарtе date, арпенtорії se întребвінцеазъ кв dіверse metoade dвпе чірконstърі.

Daка царіна de împърцit este вн параделограm saў вн dрепtвнгів, împърцim dвпе кввіінцъ înълцimіле saў базеле, ші dвчеm параделе. Ексемплв: (Fig. 86) внde fігвреле требвеsк desпърціtе în tреї пърцї еквале.

Daка fігвра este вн tрівнгів (Fig. 87), вom desпърці базвл în пърцї еквале, ші вom dвче din вîрf ші пріn пвнкtвріле de împърціре dрепtе каре вор împліні черереа; пенtрв къ tрівнгівріле парціале ast-feл fъквtе авînd ачелаші баз ші ачееаші înълцimе, вор fi еквівалеnte (107, Корол).

Daка mошіеа este вн tрапез, вom împърці în парte пе fie-каре din базеле параделе în пърцї еквале, ші вom вні пріn dрепtе пвнкtвріле de împърціре (Fig. 88). Трапезеле парціале ast-feл формаtе вор fi еквівалеnte, ка авînd базе еквале ші о înълцimе комвнъ.

113. Dар daка svпрафаца de împърцit este вн поліgon нерегвлаt, арпенtорвл ва întребвінца meto-

dѕл џенерал ѕрmътор: Ачеste konstъ înlpѕ a tъia полігонѕл în пърцї de formъ арвіtрapie, каре вор авеа diверsеле валоаре пѕmеріче хотъріte пentpѕ пърціле черѕte. Ексекѕціеа ачеstѕї metod depinde de ла forma mошіеї, шi de ла iskѕsinџа арпenlорѕлѕї; însъ, în џенерал, ел ажѕнџе а лѕа dѕпе вое basеле fіgѕрелор, шi а ле калкѕла înълціmiле dѕпе копрinsѕл че тревѕе sъ аївъ; saѕ maї віne îшї хотъраште вîрfѕл ѕпѕї tріѕпгіѕ шi diрекціеа basѕлѕї sъѕ, шi калкѕлеаzъ кît тревѕе sъ fie лѕпџimea ачеstеїа. Ексеmплеле ѕрmътоаре пot лъмѕрі ор-че педоmіріре s'ар fi пѕtѕt strекѕра în postіреа ачеstеї регѕле.

114. Fie пentpѕ ексеmплѕ întîѕ полігонѕл AB CDGH a se îmпърці în чinчї пърцї еквале. Bom mъsѕра întîѕ sѕпрafаца dѕпе modѕріле ордіnаре. Fie ачеastъ sѕпрafацъ de 1835 metpe пътрate, din каре a чinчеа парte este de 367 (Fig. 92). Тревѕе акѕm sъ fачеm în inlеріорѕл полігонѕлѕї чinчї fіgѕрї de formъ арвіtрapie авînd fie-каре кîte 367 metpe пътрate în sѕпрafацъ. Sпре ачеasta, вом лѕа пе латѕра BC, de este îndestѕл de лѕпгъ о лѕпџіme Bm, ast-fел în кît жѕmъtate продѕсѕл ачеstеї лѕпџimї прin перпendікѕлара коворîtъ din пѕпкtѕл A пе Bm sъ fie еквал кѕ 367; пentpѕ къ ast-fел ва fi валоареа sѕпрafеціi tріѕпгіѕлѕї ABm. Перпendікѕлара че n'am репрesentat ка sъ пѕ комплікъm fіgѕра, fіind кѕпоsatъ de 30 metpe, вом îmпърці пе 367 прin 30; кîtѕл ва fi жѕmъtate basѕл, шi îndoitѕл sъѕ 19,34 ва fi basѕл totaл Bm. Daка dар вом лѕа Bm=16^m,34, шi вом dѕче Am, tріѕпгіѕл ABm ва fi

îmвedepat de 367 metpe пътpate, ші пpin вршаpe вna din челе чінчї пърцї кътate.

Dака BC ap fi fost îndestвл de лвнгъ, am fi лвat пе ачеаstъ лinie o алtъ лвнціme de $19^{m},34$; ачеаsta ва fi вasвл внвї ал doiлеа tpiвнгів aвînd вîpfвл sъв în A, ші a къpвia sвпpafaцъ ва fi іаpъшї de 367 metpe пътpate. Dap sъ sвnosъm къ ачеаsta нв se поate. Вom mъsвpa пpisosвл mC; fie ачеаstъ лвнціme=7^{m}, 66. Tpiвнгівл mAC ва авеа пentpв sвпpafaцъ $\frac{7{,}66\times30}{2}=114^{mm}{,}9$; este dap maї mikъ de kît o a чінчеа пapte, kape este de 367^{mm} maї пвцin $114^{mm}{,}9$, saв de $252^{mm}1$. Tpeвве dap sъ лвъш пе CD, o лвнціme Cn, ast-feл în kît îmmвлціtъ пpin жвmъtatea пepпendiквлapeї коворîtъ din A пе CD, sъ pesвлte вn пpodвs еквал кв 252,1. Fie ачеаstъ пepпendiквлapъ de 33^{m}; вom îmпъpці пе 252,1 пpin $\frac{33}{2}$; saв шаї віne вom îmпъpці пе 252,1 пpin 33, kape dъ 7,64, ші вom îndoi kîtвл kape se ва fache $15^{m},28$; ачеаsta ва fi лвнціmea $\overline{Cn}$ че tpeвве лвatъ пе CD; dвkînd пе An, вom авеа înвedepat пentpв a doa пapte пatpвлatвpвл $CmAn$, kompвs de доъ tpiвнгівpї, din kape внвл mAC epa aflat. Dвпе ачеаsta вom mъsвpa tpiвнгівл pъmas nAD, пе kape îл sвnoсъm de 221^{mm}; difepinцa 146 a ачеstвї нвmъp кв 367 ва fi sвпpafaцa внвї tpiвнгів DAp kape tpeвве adъogat ла чел пpeчedent. Вom detepmina вasвл Dp îmпъpцind пе 146 пpin 13, жвmъtatea пepпendiквлapeї коворîte din пвnktвл A пе лatвpa CD пpелвнціtъ în intepiopвл полігонвлвї.

Аша аfлът пе Dp=11,23. Dвпе че вот мъсвра тріѕнгівл pAG, вош аfла tot întp'ачest кіп къ tpeбве sъ'ї adъогът вn алt tpiвпгів каре sъ аїбъ dpепt бas Gq=20^m,5. Аш аfлаt dap пînъ аквm патрв din чінчї пърцї еквале че tpeбве sъ fачем în полігон. Партеа а чінчеа ва fi чееа че ръmîne dintp'însвл двпе операціїле пречеdente. Мъсвра dipектъ а ачестеї свпраfеце каре tpeбве sъ еаѕъ de 367 метре, ва служі de верifікаре операціілор.

114. Біs. Întp'ачest ексемплв аm лват вn пвнкт пе перімеtpвл полігонвлвї, ла каре s'а іспръвіt тоате îmпърціpіле fiгвреї Пвteam fi îndatораці sъ fачем sъ atinгъ diferiteле пърці ла вn пвнкт dat înпъвntpв прекум este пвнктвл P каре ва fi вn пвц комвн, о моаръ, вn хелештеў. Пвtem апліка ші аічі прінчіпеле ексемплвлвї пречеdent.

În adевър двпъ че вом мъсвръ, прекум аm înвъцаt, свпраfаца патрвлатврвлвї, пе каре вом гъsі а fi de 1190^{mm} (Fig. 31), ші каре tpeбве îmпърціt în tpeї пърцї еквале, спре ексемплв, чееа че dъ іаръші пентрв валоареа fie-къріїа пърці 367^{mm}, вом мъсвра перпендікулара Pa коборітъ din пвнктвл dat пе BC. Fie ачеаstъ înълціме de 13^m. Жвмътатеа продвсвлвї ачестеї înълцімї прін 47^m, валоаре а лвї BC, dъ 305,5 продвс маї mік de кît 367 кв 61,5. Ар tpeбвi dap sъ adъогът ла tpiвнгівл PBC, вn tpiвнгів CPn, пе каре îл вом determina ка маї свс, ші каре ва авеа пентрв свпраfацъ 61^{mm},5. Întîia парте ва fi dap патрвлатврвл nPBC. Челе-лалте доъ пърці se вор аfла tot кв кіпвл ачеста.

115. Лвът пентрв ал tpeiлеа ексемплв казвл în каре о мошіе tpeбве îmпърціtъ în пърці ast-fел,

în kît nsmaĭ sna sъ fie алътsратъ, de ap fi кs nsтinцъ, кs sna din латsреле мошieĭ, în лsнгsл кърiia sъ fie, sпре ексемплs, о касъ saŭ о гръdinъ цiind de snsл din пропрietapiĭ мошieĭ de îмпърцit. Ssпosъm, sпре ексемплs, патрsлатsрsл ABCD, întîĭš îмпърцit în doъ пърцĭ еквiвалентe ABCG, AGD. De s'ap чере а se îмпърцi dsпе о алтъ disпsnepe, ast-fел în кît о парте nsмаĭ sъ fie алътsратъ кs о пропрietate че s'ap întinde din H пînъ în C, шi din C пînъ în D, черерea s'ap pedsче а трече прin пsнктsл H о трансверсалъ HK, ast-fел în кît патрsлатsрsл HCDK sъ fie жsмътate din toatъ мошieа. Dap noĭ штim sъ faчем ачeasta; пентрs къ se чере nsмаĭ а мъssра трisнгюл HCD; шi daка din întîмпларе ва fi маĭ мiк de кît ssпрафаца черsтъ, съ'ĭ аdъогъm sn алт трisнгĭš HDK, пе каре îл вом детерmina ка пînъ акsm.

Ачeste треĭ ексемпле sînt destsле ка sъ adsкъ пе sn om înцелегътор în stape а îмпърцi мошiiле în ор-кîte пърцĭ еквале se ва чере, ssпsse а трече прin пsнктsрĭ шi линiĭ date în ор-че кiп se ва чере; шi каре este tot ачеа а трансfорма ssпрafeцe întр'алте ssпрafeцe еквiваленte пропрiĭ а îмплiнi оаре-каре кondiцiĭ de nечеsitate, de fолоs saŭ de плъчере.

Fie în sfîршit пентрs чел din sрmъ ексемплs, трisнгюл ABC а se îмпърцi în треĭ пърцĭ каре sъ se аĭбъ întpe еле ка треĭ nsмере date 3; 3, 5; 4; saŭ, чееа че este tot ачееа, прекsm 6, 7, 8.

Партea d'întîĭš este îмвеdepat еквалъ кs $\frac{6}{6+7+8}$

$=\frac{6}{21}$ din sȢпрафаца totaлъ; a doa парte ва fi $\frac{7}{21}$, шi чea din Ȣртъ $\frac{8}{21}$. Fie sȢпрафаца тъsȢратъ 1145^{mm}, 50. Челе treĭ пърцĭ вор fi dap respeksiв $327^{mm},285$; $381^{mm},83$; шi $436^{mm},42$.

DȢпъ aчeasta пȢtem sъвîршi îmпърцірea ка maĭ sȢs, фъкînd în fiгȢръ atîtea triȢнгe каре вор авеа пentrȢ sȢпрафеце respeктiвe aчeste treĭ валоаре. Însъ în казȢл de aкȢm note fi преа плъкȢt a deskoмпȢне în trапeze прiн паралеле ла басȢл triȢнгюлȢĭ. Fie AHK partea d'întîĭȢ, вom авеа : AHK : ABC : : 6 : 21. Dap AHK шi ABC fiind triȢнгюрĭ asemenea, sînt între еле ка patpatеле latȢрелор омолоаце AH, AB; de Ȣnde $\overline{AH}^2 : \overline{AB}^2 :: 6 : 21$. de Ȣnde $\overline{AH}^2 = \frac{6.\overline{AB}^2}{21}$; шi $AH = \sqrt{\frac{6\ \overline{AB}^2}{21}}$. Прiн пȢнктȢл H ast-фел determinat вom dȢче HK парaлел лȢĭ BC.

Ка sъ авеm a doa паралелъ GB, вom кomпара asemenea triȢнгюл AGR кȢ triȢнгюл totaл ABC; întр'aчest каz, еле sînt între еле прекȢm 6+7 : 21; чеea че ва determina пȢнктȢл G шi aшa maĭ înколо. Лesne se înцелеце къ de s'ap fi чeрȢt a împърцi triȢнгюл în пърцĭ еквале, калкȢлȢл ар fi fost aнaлог шi пȢцin maĭ simплȢ.

116. În sfîpшit, daкa moшiea de împърцit este termiнатъ de Ȣn kontȢp кȢрвiлiн (Fig. 90), требȢе sъ фачеm împърцірea прiн піпъite în кiпȢл Ȣрmътор.

Bom dȢче Ȣn бас AB каре ва despърцi fiгȢра în доъ пърцĭ maĭ еквале, шi ле вom афла валоарea

пріп metodвл *n°*. 103. Ast-фел вом авеа валоареа sвпрафацiалъ а фiе-къріia пърцї къвtate. Двпе ачеаsta, вом двче о перпендiквларъ *m*P întр'вп пвнкt *m* ast-фел în кît фiгвра А*m*P, маї sъ аїбъ валоареа черstъ пепtрв фiе-каре парte; лвкрв преа лesne, sокоtind îмпърцiреа преалабiлъ а фiгврiї tоtале, în пърцї кърора ам мъsвраt sвпрафецеле. Дака, прекsм este пробабiл, фiгвра А*m*P, мъsвратъ дîn поў, пв se афлъ еквалъ кв sвпрафаца къвtatъ, вом мвtа пвнкtвл *m*, шi вом фаче о фiгвръ А*nq*, каре маї мвлt se ва апропiia de валоареа къвtatъ. Кв пвцinъ депрiндере шi iskвsinцъ, арпеntорвл ва ажвпце în datъ ла sкопвл sъў. Операцieа tot аша se ва врша шi пепtрв челе-лалtе пърцї.

Дака локвл ва фi inакчеsiбiл înъвпtрв, требве sъ алергъм ла tрактаtврiле sпечiале прекsм шi пепtрв мвлtе амървпtе каре пв пot афла лок întр'вп пречis.

(Теоріеа *n°* 111.)

117. Аплiкацiiле челе маї dese але ачеsteї teорiї sînt мъsвра басineлор, шi маї вîрtos ачееа а баsелор de колоане шi а ваselор de toate фелврiле de капачiтъцї. Ачеste desволтърї îшї вор гъsi локвл în а tреia парte; поï вом da аiчї пвмаї ексемпле de калквл.

1° Чiркоnферiпца вneї poтвпde este 118^{mm},08, каре este sвпрафаца еї?

Raza este еквалъ кв semiчiркоnферiпца îмпърцiтъ прiп пвмървл π; аша dар вом авеа $R=\frac{59,04}{3,1416}=$

18^{m},793. Îmmѹлцind npin semiчipконferinцa 59,04, авem 1109^{mm},5387.

2° Че diametpѹ tpeбѹe sъ aiбъ ѹn basin ка sѹпpafaцa sa sъ fie de 100 metpe пъtpate?

Fie x paza, $\frac{1}{2}$ чipконf. ва fi $\pi.x$; шi sѹпpafaцa sa $\pi.x.x.=\pi x^2$; аша dap $\pi x^2=100$; шi $x^2=\frac{100}{\pi}$, de ѹnde $x=\sqrt{\frac{100}{\pi}}\sqrt{\frac{100}{3,1416}}=\sqrt{31,8309}=5,642$; îndoind, вom авea 11^{mm},284 пentpѹ diametpѹл че tpeбѹe sъ dъm basinѹлѹї.

Пpea des se întîmплъ ла mъsѹpъtoape sъ dъm neste sermente de чepкѹpї кape tpeбѹesк пpeцѹite. Sпpe ачeasta noї pекomandъm sъ dѹкъ коapde ка ch, cg (Fig. 97) кape skimбъ sermentѹл întp'ѹn tpiѹнгiѹ, пpeкѹm am ѹpmat ла mъsѹpapea figѹpeлop кѹpвiлine; anoї nѹ maї pъmîne niчї o гpeѹtate.

Maї des aвem de mъsѹpat sѹпpafeцe de feлѹл лѹї ABCD, кape sînt dpentѹнгe neste жѹmъtъцї de чepкѹpї. Sпpe ачeasta, вom калкѹла sѹкчesiв dpentѹнгiѹл întpeг ABCD шi sѹпpafaцa simiчepкѹлѹї кape ape de diametpѹ DC; difepinцa чeлop doъ pesѹлtate ва fi mъsѹpa къѹtatъ.

(Teoriea n° 114).

118. Ачeastъ teopemъ faїmoasъ în anaлeлe цeometpieї, a fost afлatъ de Пitaгopa. Fpѹmѹseцea eї шi maї mѹлt imnoptanцa pesѹлtateлop saлe, її npiчinѹipъ atîta бѹкѹpie, în кît npomise zeiлop o екatomбъ. Dap pefлeкsiea ѹpmînd чeлop d'întîiѹ tpansnoap-

te, filosofъл se гъsi преа stpîmtopat пentpв împлі-пipea fъгъdвinцeї saле. Кв toate aчeste, fiind къ пв sпeчifiкase пічї mъpimea пічї natвpa боілop че se îndatopa sъ saкpifiчe, îшї швлцвmі конштііпца saкpifiкînd лвї Івпіtep боішорї компвшї de fъinъ ші de miepe.

О mвлціме de конseквinце fолоsitoape аръtаръ în datъ feкonditatea aчeslвї пpінчіп, ші поate чіпева жвdека imпортanца лор în окії Гречілор, dвпе aчea-stъ хоtъpîpe кат рігвроаsъ а лвї Платon: къ а-чела ера абіа вредпік de пвmеле de om, каpe пв штіеа къ латвра патpатвлвї ера пекопmensврабілъ кв diaгonaлa sa. Ор-квm ва fi, пропоsiціеа пъtpatвлвї іпоtепвsiї жоакъ о mape ролъ în цеоmetpie, вnde ea se întpeввin-цеазъ maї кît aчeea a tpiвпгівpілор asemeneа.

Ексеmплв.

Se чере înълціmea So ші dвпга SB, а впеї пі-pamide регвлate кв басвл пatpat, каpe пв se поа-te mъsвpa d'a dpeпtвл. (Fig. 94).

Dintp'вп пвпкt g лвat ла înълціme de pezemat пе Dвпга SB, вom кобopî о перпепdiквларъ gn пе BC, aчeastъ лiпie ва fi паралелъ ла о dpeaпtъ sm, каpe ва впі вîpfвл s кв mіжлоквл латвреї BC, fiind къ патвра пірамidеї, SBC este isosчелъ. Мвтеm mъsвpa d'a dpeпtвл Bg, gn, Bm, ші авеm doъ про-порції: Bn : gn : : Bm; : sm; ші Bn : Bm : : Bg : Bs, каpe вор slвжі sпре калквлареа лвї SB ші sm. Кв ажвtорвл aчesteї din вpmъ лiпiї ші а лвї oM, кара este d'o потрівъ кв жвmъtatea латвреї AB=

Bm, вош калкъла пе *so*; пentpъ къ ачеаstъ înълціme фаче ъn tpiъnгiъ dpeптъnгiъ în *o*, къ *om* шi *sm* каpe este inotenъsa. Fie $Mo=50^m$, $Sm=260$; вom авеа $\overline{260}^2-\overline{50}^2=\overline{So}^2$; de ъnde $\overline{So}^2=67600-2500=65100$; de ъnde $So=\sqrt{65100}=255^m,1$.

Алtъ аплiкаціе.

119. Пропріеtatea пъtpatълъї inotenъsеї dъ npiчinъ konstpъкціi foapte folositoape a екерълъї de sfoapъ. (Fig. 95).

Лъъm пе о sfoapъ оаpe-каpe tpeї лъnцiмї екъале, tpeї metpe спре екsemплъ; апоï în пpeлъnцipe о лъnціme de natpъ metpe, шi апоï о лъnціme de чinчї metpe, desпъpціte ачеste împъpцipї npin nodъpї. Împpeъnъm dъпe ачеаsta estpemitъціле sfoapeї ast-fel în kit sъ se înkizъ; de вom întinde ачеаstъ sfoapъ пе пъmînt, чeле tpeї nodъpї котpoпindъ-se къ тъецеле, вom авеа ъn tpiъnгiъ dpeптъnгiъ, пentpъ къ пъtpatъл 25 ал inotenъsеї este екъал къ sъma 9+16 а пъtpateлор лаtъpeлор.

Ачеаstъ sfoapъ поаte sлъжi а dъче пepпendiкълаpe. Fie ъn пъnкt G dat пе о dpeaптъ; вom пъnе în G котъл че desпаpte лъnціmea 3 de лъnціmea 4; шi sfoapa întinsъ ва da npin котъл съъ K, ъn ал doiлеа пъnкt ал пepпendiкъларeї.

Ачest екер este пpea folositop maї вîptos kînd пepпendълаpeлe tpeбъe sъ tpeaкъ npin estpemitъціле dpeптeлор че nъ se пot пpeлъnці. Еа ва sлъжi а вepiфiка ъnгiъpiле dpeпte але zidipiлор, але кърцілор шi гръdinелор. Se вede кът пe пъtem sлъжi къ dinsъл ка sъ dъчem sfopї întp'о dipeкціе opizon-

tалъ (*n*° 96). Întр'aчest din špmъ каz ші în maĭ mɤлte алтеле, nɤ'ĭ nɤtem da лɤnцimĭ de 3, 4, 5, metpe : dap nɤtem лɤa 3, 4, 5, diчimetpe, ші maĭ nɤцin de o чере tребɤinца.

(Teoriea *n*° 117, 118).

120. Аша dap doъ fiгɤpĭ asemenea, але кърора dimensiiле omoлoaце sînt îndoite, întpeite.... ɤnеле de кît алтеле, nɤ aɤ sɤnpafeцеле îndoite, întpeite.... ɤna de кît алta. Aчeasta este o ръtъчіре преа кɤnoskɤtъ.

Maĭ pesɤлtъ înкъ dintp'aчeastъ пропosiціе ɤn mіжлок преа komod ка sъ mъsɤpъm sɤnpafeцеле поліroaneлор регɤлate, fъръ a къɤta чentpɤл nічĭ anotema, ші fъръ a'ĭ pidiка планɤл. Este destɤл sъ кɤnoaштem nɤmaĭ валоарea sɤnpafaціалъ a поліroнɤлɤĭ авînd de латɤpъ ɤnimea, ші sъ îmmɤлцim aчeastъ sɤnpafaцъ npin пatpatɤл латɤpeĭ поліronɤлɤĭ че воim sъ mъsɤpъm. În adeвъp, fie S sɤnpafaца ɤnɤĭ eksaron каре sъ aĭбъ dpent латɤpъ 17^m; вom авea dɤne teopemъ : S : eksaron : : $\overline{17}^2$: 1^2; de ɤnde $S=\frac{\text{екs.}\times\overline{17}^2}{1}=\overline{17}^2$ opĭ eksaronɤл авînd de латɤpъ ɤnimea. Eatъ sɤnpafeцеле поліroaneлор регɤлate че nɤtem întîлni în практікъ; sɤnosъm латɤpa лор екɤалъ кɤ ɤnimea.

Пatpat	1,0000
Tpiɤnгіɤ екɤілatɤp . . .	0,4330
Пentaron регɤл.	1,7205
Eksaron	2,5980
Oktaron	4,8284
Dекaron	7,6939

Екsemплв. Каре este sвпрафаца внві васin октогоn авînd 25 metpe în латвръ? Rъsпвns. Ачеаsta ва fi $4{,}8284 \times 25^2 = 3017^{mm},75$.

Sвпрафеценле de d'asвпра s'аŭ калкулаt кв tpiгоnometpiea.

(Теориеа *n*° 119).

121. Ачеаstъ teоpemъ sлвжеште a demonstpa леџеа deskpeштеpiĭ че вpmeазъ лвmina, deпъptîndв-se de isвоpвл sъŭ.

Fie L (Fig. 98) вn пвnkt лвmіnos каре îшпръштie paze în toate dipeкціiле. Sъ konsidepъm вn mînвкiв konik întînnind вn план, o foae de xîptie, sпре еksemплв, în distанца LD. Mînвкiвл se ва tъia de foae în черк, але кървia toate пвnktвpiле sînt d'o пotpiвъ лвшinate. De вом пвне foaea ла o distанцъ îndoitъ, ачелашĭ mînвкiв se ва tъia întp'вn черк maĭ mape, шi ачееашĭ kîtime de paze pîsipindв-se întp'o maĭ mape sвпрафацъ, fie-каре пвnkt ва fi maĭ пвцin лвminat în рапортвл челор doъ sвпрафеце. Însъ, din пpiчina tpiвнгiвpiлор asemenea, авем $DA : da :: DL : dL$; de вnde $\overline{DA}^2 : \overline{da}^2 :: \overline{DL}^2 : \overline{dL}^2$. Аша dap черквpiле каре se аŭ întpe еле ка пътpateле pазелор, se аŭ întpe еле ка пatpateле distанцелор. Аша dap лвmina deskpeште пpеквm пътpatвл distанцелор кpeште.

(Теориеа *n*° 114 шi 119.)

122. De вом фаче tpeĭ semiчерквpĭ пе челе tpeĭ латвpe але внвĭ tpiвнгiв dpeптвнгiв (Fig. 96), ачеsте

ıpeĭ fiгȣpĭ avînd-se ка пъtpatеле diametpелоp лоp, semiчepкȣл, fъкȣt пе inotenȣsъ, ва fi екȣал кȣ sȣma челоp-лалte доъ. Sъ împлînъm пе чел d'întiiȣ din sȣsȣл inotenȣsеĭ, tpiȣпгюл dpeпtȣпгiȣ ap tpeвȣi sъ se afле înskpis, ші semiчepкȣл чел mape ва къdea пeste челе доъ miчĭ. De вош skъdea пaptea комȣпъ кape konstъ din доъ sermente chA, cgB, ва pъmînea din чepкȣл чел mape tpiȣпгюл dpeпtȣпгiȣ CAB; ші din челе доъ miчĭ, челе доъ sпaчiȣpĭ кȣpвiлiне $cnAh$, $chBm$, а кърop sȣmъ este пpin ȣpmape екȣалъ кȣ tpiȣпгюл dpeпtȣпгiȣ. Авem dap о sȣпpafaцъ кȣpвiлiнъ кȣapaвiлъ. Aчeste доъ кpoasane sînt кȣnoskȣte sȣвt пȣmeле de лȣпiцеле лȣĭ Iпoкpat Xiotȣл.

ПАРТЕА III. DESПРЕ ВОЛȢMINE.

(Teoriea n^{o} 130).

§ I. Desпpe плане.

123. Aчest пapaгpaf, пȣцin пpiimitop de апликацiĭ deoseвite ші intepesante, este вaзȣл aptелоp de konstpȣкцie ші de astponomie. Цeometpiea desкpiптiвъ este о neкontenitъ апликацie а пpiнчепелоp saле.

Кȣ toate aчestea noĭ nȣ вom intpa întp'aчeastъ кapiepъ; ка sъ fie folositoape, ap tpeвȣi sъ zichem atîtea кîte nȣ пoate пpiimi natȣpa aчestȣĭ tpaкtat.

(Teoriea *n*° 131).

124. Ла тъiатвл челор маї мвлте пietpe, se пропвне а фаче феџеле перпендiквларе пе двнџї. Sпре ачеаsta, двчем доъ перпендiквларе ла о двнгъ ïн-тр'вн пвнкт, шi din доъ феџе каре se тае ïнтр'ачеаstъ двнгъ. De вом статорнiчi лiniea че фаче тъi-швл херъstръвлвї а sta неконтенit пе ачеste доъ перпендiквларе, планвл че ва фаче ва копрinde а-чеste доъ перпендiквларе, шi двнга, фiind перпен-дiквларъ ла доъ дрепте двse прiн пiчiорвл sъв ïн планвл ноў, ва фi перпендiквларъ ла ачеst план.

(Teoriea *n*° 136.)

125. Ка sъ верiфiкъмў дака вн zid este вертi-кал, не sлвжiм кв вн фiр кв плвмб, каре аре дi-рекџiеа внеї перпендiквларе пе sвпрафаџа апеї лiнi-штitе. Dака фiрвл se котропеште de tot кв zidвл, ачеsta este вн план че тpече прiнтр'о перпендiквла-ръ ла планвл орizонтал; аша дар кiар zidвл este перпендiквлар ла ачеst план, шi прiн врмаре вер-тiкал (Fig. 100).

Fiрвл кв плвмб sлвжеште ла конstрвкџiї, а ïн-кредinџа поsiџiiле орizонтале. Sпре ачеаsta, ïл а-шеzъм ïн вïрфвл внвї трiвнгiв isosчел de лемн; ба-sвл фiind орizонтал, фiрвл ар тpебвi sъ тае ачеst бас прiн мiжлок каре este insемнат кв о двнгъ; de тpе-че d'а дреапта saў d'а stïнга семнвлвї, лiniea пе каре este ашеzat ачеst бас нв este орizонталъ. Ïн лок de а ашеza d'а дрептвл басвл пе лiniea saў пла-нвл че тpебве sъ фie орizонтал, прелвнџiм латвреле

tpiȣnгiȣлȣĭ sȣbt basȣл sъȣ, de doъ кitimĭ екȣале. Se înцелеце къ aчeste doъ пiчioape aшezîndȣ-se пе ȣn план opizontaл, fipȣл кȣ плȣmб ва tpeче tot npin miжлокȣл basȣлȣĭ sъȣ. Aчest instpȣment se nȣmeшte nівелъ кȣ перпеndiкȣларъ; ea este преа mȣлt întpeбȣinцatъ de zidapĭ; fiгȣpа а doа este nȣmaĭ о вapietate а еĭ. Este înвedepat къ, ка sъ ne înкpedinцъm de opizontaлitatea ȣnȣĭ план, тpeбȣe sъ пȣnem nівела în toate кinȣpiле înвîptindȣ-о пе пiчioapеле sале în toatъ întindepea планȣлȣĭ.

(Teoriea n^o 148—151).

§ II. МЪSȢРА SȢПРАFЕЦЕЛОР ТРȢПȢРІЛОР.

126. Aчeste пatpȣ teopeme nedînd npiчinъ de nічĭ о обsepвaцie sпечiaлъ, sъ ne mȣлцȣmim кȣ ȣn екsemплȣ de калкȣл.

Кit ва kosta zȣгpъвеала mapmȣpatъ а шесе колоане de $0^m,70$ de diametpȣ, înaлte de $4^m,20$, кite 2 *f*. 20 чent. metpȣл natpat de zȣгpъвit?

Тpeбȣe sъ евалȣъm sȣпpafaцa aчestop колоане, шi maĭ întîiȣ чipкonfepinцa basȣлȣĭ$=0,70+\pi=2^m$, 1912; îmmȣлцind npin 4,20, авem $9^{mm},236304$ пentpȣ sȣпpafaцa ȣneĭ колоане. Îmmȣлцind npin 2,20, шi шesind-о, afлъm 121 *f*. 92 чent. пentpȣ toatъ келtȣiала (1).

---

(1) Калкȣлȣл aчesta este fъкȣt пе inotesȣл къ колоанеле sint чiлindpiче saȣ maĭ чiлindpiче. Преа des se кam ritȣesк колоанеле anpoane de капiтол, шi кȣ toate къ fiгȣpа sa nȣ este atȣnчĭ intoкmaĭ кȣ а ȣnȣĭ кon tpȣnкiat, este maĭ sirȣp de а о konsidepa ка ast-feл, шi tot ка аша sъ о калкȣлъm.

(Teoriea *n*° 152).

127. Мъѕѕра ѕѕпрафеції sfереї ѕлѕжеште maї кѕ dinadinsѕл а'ї афла волѕminѕл; нѕ вom ziче maї шѕлt asѕпра ачestѕї sѕбiект, пentpѕ кape tpimitem ла мъѕѕра волѕminелор. Eatъ нѕmaї ѕн ексеmплѕ de калкѕл:

Раzа mіжлочie а глобѕлѕї пъmîntеsк fiind de 6366200 metpe, de кît îї este sѕпрафаца?

Чipкonfepinца ва fi $6366200\times2\times3,1416=$ $40000107^m,84$. Îmmѕлцind ачest pesѕлtat пpin diametpѕл 12732400, афлъm 509297373062016 metpe пътpate. Авînd раzа de 1591 miле, вom афла iаръшї sѕпрафаца în miле пътpate; dap о пѕtem dedѕче din нѕmъpѕл пречеdent îmпърцind пpin 16000000, нѕmъp de metpe пътpate че'л копрinde ѕн miл пътpat. Афлъm 31831086 miле пътpate; este maї апроапе de 15000000 de opї sѕпрафаца Парisѕлѕї евалѕatъ ла 34000000^{mm}.

(Teoriea *n*° 146.)

Despre secціиле коniче шi sфеpiче.

128. Nѕmesк secціi коniче tpeї фелѕpї de кѕpбе pesѕлtînd din intepsекціea sѕпрафеції ѕнѕї кon кѕ ѕн план.

Daка планѕл пътpѕnde ast-фел конѕл în кît toate ценеpatpiчеле sъ se tae, авem fiгѕpa GH (Fiг. 101); se нѕmeште ѕн елinс. Ачеаstа este fiгѕpa кѕносkѕtъ sѕбt нѕmеле de овал.

Daка планѕл тъеtop este dѕs паралел кѕ ѕна din ценеpatpiчеле (Fig. 102), ел întîлнеште шi tae базѕл конѕлѕї. Кѕpба фopmatъ пе sѕпрафацъ ape доъ

ръmврĭ asemenea каре se depъrtez nemърџinit; aчeasta este параболa.

În sfîрšit, dака планвл tъetор нв este în nічĭ внвл din челе doъ каze пречedente, прелвнџірea sa întîлнеште конвл опвs ла вîрf, ші secџiea аре doъ пърџĭ але кърор раmврĭ se întind iаръшĭ nemърџinit (Fig. 103); aчeasta este o іперболъ.

Noĭ нв ворбim aiчĭ de черквл каре se ва faчe printр'o seкsie паралелъ ла бas.

Челе treĭ кврбе кърора аръtаръm џенерaџіea se нвmesк secџiĭ коніче. Еле аў о мвлџime de пропрietъџĭ însemnate, dар каре es din класa прінчіпелор елементаре. Чеĭ векĭ s'аў окврat de еле; не аў ръmas tраktatврĭ asвпра aчestвĭ свбiект de Еввклid ші Аполonie de ла Перга. Însъ analisвл алџебрік ал челор ноĭ а преашвлt simплifікat черчетърiле, ші deskoperirile fisiчеĭ челеste лё аў фъквт întр'ачееашĭ време simџitoаре folosврiле.

Еліпsвл este кврба че о deskriў toate планетеле, ші поate ші кіар soареле. Кред къ внеле комete deskriў параболе saў іперболе, ші în kazвл aчesta еле s'ар пеrde în nemърџinit. Параболa este кврба че о deskriў пе свпрафаџа пъmîntвлвĭ toate tрвпвріле греле че нв кad вертікал. Гюлеаоа ла ешіpea sa din tвn deskpie о порџie de параболъ пвџin simџiбілъ; însъ кв бomба нв este tot аша, пентрв къ еа ешind din мортіеръ, петрече în sпачіў о параболъ преа кврбъ ші кврat deseшнатъ Іпербола se deskpie în кліщеле noastре de estремitatea вmбреĭ внвĭ stiл de kadран, saў, maĭ біне, de вн гномon în toate zілеле de neste an, afаръ de еквіноксe. În adeвър, раza soареллвĭ каре tрече прін чен-

трꙋл гномонꙋлꙋї, deскріе імведерат імпрежꙋрꙋл stiлꙋлꙋї о sꙋпрафацъ конікъ, авінd de вas черкꙋл soлар, ші de вірf чентрꙋл гномонꙋлꙋї. Планꙋл кадранꙋлꙋї tae ачest кон, пентрꙋ къ черкꙋл solар este парте sꙋвt opizont, ші tot інtр'ачееаші време конꙋл опꙋs ла вірf, пентрꙋ къ razеле solаре пътрꙋнd планꙋл кадранꙋлꙋї. Локꙋл intepsекціілор, saꙋ кꙋрва fopmatъ de імпреꙋнареа лор este dap o іпервolъ.

Sînt елінsе, параволе ші іперволе de тъpimї de deскіdepї ші de dimensiї difepite, dꙋпе natꙋpa конꙋлꙋї ші позіціеа планꙋлꙋї tъetop. Asemenea ші іперволеле de ꙋтвръ sînt преа difepite ꙋнеле de алtеле. Кꙋрвеле че zъріш ꙋне-орї пе кадранеле челе mapї, sînt іперволеле че ле deскріе гномонꙋл în zілеле de solstiчіе; asemenea пꙋtem траце іперволе în ор-че zi a анꙋлꙋї.

129. Dap, лъsînd d'o парте парабола ші іпервола, noї вom аръta кіпꙋл de a deскріе пе пъmînt ші a mъsꙋpa елінsꙋл; пентрꙋ къ ачеastъ кꙋрвъ se întîлнеште преа des прін гръdінї ші пе zidipї. Eatъ кꙋм se поate deскрі ꙋн еліnс пе пъmînt.

Înfiцem în пъmînt доъ цъpꙋше *f*F (Fig. 104), ші ле îнконціꙋръm кꙋ о sfoаръ înкisъ, însъ ал кърееа îndoit sъ ковіршаскъ лініеа *f*F кꙋ о кіtіме FB, каре, кꙋ A*f*, sъ факъ лꙋнціmea totaлъ AB тревꙋінчіоasъ пентрꙋ еліnс; dꙋпе ачеаsta întindem sfoаpa кꙋ ꙋн ал treiлea цъpꙋш s пе каре îл плімвъm, ші каре deскріе кꙋрва черꙋtъ. Челе доъ пꙋнкtꙋрї *f*, F se нꙋmesк ветреле елінsꙋлꙋї; лініеа AB каре о deспарте în доъ пърцї екꙋале ії este аксꙋл чел mape. Daка în міжлокꙋл *m*, ал лꙋї *f*F вom pidiка о перпенdікꙋларъ CD, ачеаsta ва fi аксꙋл чел mік; ел de-

terminъ лърцimea elinsълъї прекът АВ лъnцimea sa.

Кърва ast-fel deskrisъ este ън орnament de nартер шi de скълптъръ maї плъкъt окюлъї de kit черкъл, прекъш шi dreптъпгюл este maї prеfерat de kit пътратъл. Se noate deskri къ ън кin аналог не zidъpї шi кiар не хiртie.

130. Întrевъinцареа aчestъї mod не хiртie nefiind аша комоd, prefер maї în џенерал о алтъ konstpъкцie каре dъ о fiгъръ maї плъкътъ, шi каре în adeвър нъ este ън eлins, dар de о eкзекъцie къ мълt maї лesne (Fig. 105).

Sпре aчeasta лъът о dreantъ *ab* екъалъ къ аксъл чел mаре че tребъе съ аїбъ elinsъл, шi deskрim не amindoъ жъшътъцiле de аксе *ao*, *ob* ка diametре, doъ чiркonfеринце екъале шi tанценte; dъпе aчeasta din пънктъл *o* ка чentръ, шi къ ачeеашї разъ, о а treia чiркonferinцъ каре съ tae не челе doъ d'intiiъ, шi съ treакъ prin чentръpiле лор *x*, *y*. Дъчem întр'aчeasta diametръл *mn*; anoї din пънктъл *n* ка чentръ, шi къ о разъ екъалъ къ лiniea *nyp* dъсъ prin чentръл *y* пinъ ла întiлnireа ънеiea din чiркonferinцe, deskрim ън арк de черк *pq* каре se ва întiлni къ чiркonferinцa onъсъ întр'ън пънкt *q*, ашеzat întр'ън кin simeтрiк къ пънктъл *p*. Din пънктъл *m* ка чentръ вom deskri tot къ кinъt aчesta ън арк *gd*, шi вom авеа о кървъ *apqbdg*, компъсъ de патръ аркърї de черкърї, шi не каре пъtem konsidера ка ън eлins.

Noї креdem къ fiгъра ар fi maї грацioasъ, шi s'ар апропiia maї мълt de ън adeвърat eлins, daка în лок de а пъне în *n* чentръл аркълъї *pq*, іл пънem maї жos не diametръл *mn*, în *h* sпре eksem-

плъ, лѫînd de ражъ dреаптъ dѫсъ прin пѫнктѫл *h* шi чентрѫл *y* пiнъ ла întiлнiреа чiрконферiнцеĭ *ay*; вom авеа атѫнчĭ кѫрба *apvqbdug*.

Ast-фел se фаче фiгѫреле нѫmite mînѫшĭ de папер, кърора ле варiазъ dѫпе вое кѫрбеле, варiiндѫ-ле посiцiеа чентрѫрiлор шi мърimеа ражелор, însъ афаръ din операцiiле фъкѫте пе хîртiе, ор кînd вom пѫтеа întребѫiнца кѫnstрѫкцiеа кѫ sфоара, кѫm am възѫт къ se поате пе zid шi пе пъmînt, гѫстѫл бѫн ва префера tot d'аѫна ачеst mijлок, кѫ atît maĭ mѫлt пентрѫ къ чел пѫцiн не dъ atîtеа варiетъцĭ кît тоате челе-лалте, пентрѫ къ пѫтеm da елiпsѫлѫĭ ор-че dimensiĭ шi ор-че тѫрнѫръ вom voi, апропiiнd saѫ депъртînd ветреле пе аксѫл чел mаре, пе каре îл пѫтеm лѫа dѫпе вое.

131. Кредеm de требѫiнцъ а алътѫра лîнгъ елiпs о алтъ кѫрбъ каре se întребѫiнцеазъ кîте о datъ în desemne, шi а кърiiа конstрѫкцiе este преа simплъ. Ачеаsta se нѫmеште s п i р а л а.

Ка sъ о dеsкрiм (Fig. 106) лѫъm о dреаптъ dѫпе вое *ab*, пе каре, ка diametрѫ, dеsкрim о semiчiрконферiнцъ *amb*. Пѫind dѫпе ачеаsta ѫн вîрф de кomпаs în *a*, шi лѫînd о лѫнцimе еквалъ кѫ diametрѫл *ab*, вom dеsкрiе кѫ ачеаstъ mърimе ка ражъ, шi din пѫнктѫл *a* ка чентрѫ, о алтъ semiчiрконферiнцъ *bnc*; dѫпе ачеаsta вom dеsкрiе о а треiа *cpd* din пѫнктѫл *o* ка чентрѫ кѫ *od*, ка ражъ; dѫпе ачеаsta о а патра *dgq* кѫ 2 *ab* пентрѫ ражъ, шi din пѫнктѫл *a* ка чентрѫ, шi аша maĭ înколо, лѫînd алтернатiв пентрѫ чентре пѫнктѫрiле *o* шi *a*, шi мърiнd în фiе-каре datъ dеsкiдереа кomпаsѫлѫĭ кѫ о кîтimе еквалъ кѫ ража *oa* а челѫĭ d'întîiѫ черк. Кѫ

кіпѕл ачеsta, fie-каре поѕ̆ diametpѕ ковîршеште пе пречеdentѕл кѕ о̆ кitime еквалъ кѕ 2 *ao*; аша dap ачі este afapъ de toate sпіралеле ѕп intepвал statopпік ші еквал лѕі *ab*; înкъ, este лesne а кѕпоаште къ елементѕл кѕрвеі este pretѕtindinea перпепdікѕлар ла paza sa, ast-fел în кît îmвіпареа dіверселор пърці este atît de перfектъ кît ші пѕtinчіoasъ.

De am воі sъ мъsѕръм sѕпрafаца ѕпеї пърцї оаре-каре а figѕpeї, am кѕпоаште лesne къ еа este еквалъ лѕі $\frac{\pi r^2+4\pi r^2+9\pi r^2+16\pi r^2+,}{2}$ шчл., ші în ценерал лѕї $\frac{\pi r^2}{2}$ îmmѕлціt prіп sѕма atîtop tepmeнї din sѕita пътрателор а пѕмерелор патѕрале кîte semisfepe sînt în партеа figѕpeї че воім sъ мъsѕръм. Аша din *a* пînъ în *h* sînt 5 semisfepe saѕ̆ 5 semічеркѕрї; sѕма sѕпрafецелор este $\frac{\pi r^2}{2}\times(1+4+9+16+25)=55\frac{\pi r^2}{2}$, fie r=1; ачеastъ espresie se ва fаче 86,394.

132. Ка sъ мъsѕръм sѕпрafаца еліпsѕлѕї, тревѕе sъ лѕъм лѕпціmеле челор doъ аксѕрї ші sъ fачем prodѕsѕл челор doъ жѕмътъці але лор, пе каре вом îmmѕлці апоі prіп пѕмърѕл π. Demonstpaціеа ачестеї pегѕле пѕ este atît de елементаръ ка sъ se espѕe аічї. Eatъ пѕмаї ѕп ексемплѕ de калкѕл.

Ам aflat аксѕл чел mape de $3^m,12$; пе чел шік de $2^m,04$; вом îmmѕлці $\frac{3,12}{2}$, saѕ̆ 1,56 prіп $\frac{2,04}{2}$, saѕ̆ 1,02; prodѕsѕл=1,5912; îmmѕлціnd prіп 3,1416, aflъm $4^{mm},9989$ пепtpѕ sѕпрafаца еліпsѕлѕї.

Sekцii Sфepiчe.

133. Toatъ sekцiea ꙋneĭ sfepe fъkꙋtъ de ꙋn плaп este ꙋn чepk. Este ꙋn чepk mape, daka плaпꙋл tъetop tpeчe npin чentpꙋл; eл ape de diametpꙋ diametpꙋл sfepeĭ, шi чipkonfepinцa sa se nꙋmeшte шi чipkonfepinцa sfepeĭ.

Obiчnꙋesk a împъpцi глobꙋл tepestpꙋ шi sfepa чeлestъ în sekцiĭ, пe kape лe nꙋmesk mepidiane шi пapaлeлe. Eatъ kape sînt paцiiлe шi npinчiпeлe aчestop împъpцipĭ.

Ka sъ fiksъm nosiцiea ꙋnꙋĭ пꙋnkt пe o sꙋпpafaцъ плaпъ, este destꙋл sъ dъm чeлe doъ distanцe aлe saлe kъtpe doъ пꙋnktꙋpĭ saꙋ̆ doъ лiniĭ kꙋnoskꙋte. Însъ este îmbedepat kъ пꙋnktꙋpiлe de плekape neeksistînd natꙋpaл пe sꙋпpafaцa sfepeĭ, tpebꙋe sъ ne faчem пꙋnktꙋpĭ de konbenцie, se înцeлeцe kъ лinsind aчeшtĭ tepшinĭ de kompapaцie, цeogpafiea ap fi neste пꙋtinцъ. Eatъ kꙋm iĭ ditepmin.

Se шtie kъ пъmîntꙋл se îmbîpteшte îmnpeцiꙋpꙋл ꙋnꙋĭa din diametpeлe saлe, aлe kъpꙋĭa estpemitъцĭ se nꙋmesk пoлꙋpĭ; diametpꙋл nemobiл este aksꙋл пъmîntꙋлꙋĭ (Fig. 107) Aчest aks npeлꙋnцit întîлneшte чepꙋл în doъ пꙋnktꙋpĭ, kape se nꙋmesk пoлꙋpĭ чepeшtĭ, чeea чe detepminъ o лinie dpeaptъ împpeцiꙋpꙋл kъpiia чepꙋл se пape a se îmbîpti tîpînd dꙋпe eл toate steлeлe. Пoлꙋл nopd în клimeлe noastpe se aflъ d'asꙋпpa opizontꙋлꙋĭ, шi npea aпpoaпe de dinsꙋл este o stea de a tpeia mъpime, kꙋnoskꙋtъ sꙋbt nꙋmeлe de stea пoлapъ. Ka sъ simплifikъm teopiea noastpъ, noĭ o bom sokoti aшezatъ eksakt

în пол. Astponomiĭ pedsк ла чеea че tpeбзe sъ fie pesзltatcле aflate dзпe aчest inotes. Ползл este depъptat de dînsa de 1°, 36′.

Înкinзesк зn план tъind sfepa пepпendiкзлар пe aкs, tpeкind npin чentpзл. Dintp'aчeasta pesзлtъ зn чepк GK, че'л nзmesк eкзatop, пentpз къ, кînd soapeлe deskpie eкзatopзл чeлesl, saă чepкзл fopmat пe чep de планзл eкзatopзлзĭ пъmîntesк пpeлзnцit, zілeлe sзnt eкзaлe кз nопцiлe пeste toatъ faцa пъmîntзлзĭ.

Fie акзm зn пзnкt oape-кapе V пe sзпpafaцa пъmîntзлзĭ; пpintp'aчest пзnкt шi aкs sъ dзчem зn план, кapе ва fi пepпendiкзлар (Teop. 136) пe планзл eкзatopзлзĭ. Dintp'aчeasta ва pesзлta o чipкonfepinцъ VG*qkp*; apкзл GV кonpins între eкзatopзл шi пзnкtзл V se nзmeшte лъцimea лзĭ V. Înцeлeцem dap пpin лъцimea зnзĭ лок distanцa sa пînъ ла eкзatop, sokotitъ în rpade, minзte, шчл, пe зn apк de чepк mape пepпendiкзлар ла eкзatop.

Аша dap nosiцiea зnзĭ пзnкt пe пъmînt ва fi d'o пapte fiksat пpin кзnoaшtepea лъцimiĭ aчestзĭ лок; însъ nз ва fi de tot fiksat, пentpз къ toate пзnкtзpiлe зnзĭ чepк mік Vz, dзs пapaлeл ла eкзatop, aă îmвedepat aчeeaшĭ лъцime; maĭ tpeбзe dap o a doa kondiцie.

Sъ ne înкinзim зn алт чepк tpeкind пpin aksзл pxyq (Fig. 108), шi пpintp'зn лок xotъpît, пe sзпpafaцa rлoвзлзĭ, пpin Пapis, snpe eksemплз. Чepкзл пe кapе se aflъ пзnкtзл V, faчe, кз чeл чe tpeчe пpin Пapis, зn oape-кapе зnrĭз, шi aчest зnrĭз ape îmвedepat de mъsзpъ apкзл GY ал eкзatopзлзĭ кonpins între чeлe doъ плане. Аша dap, de am кз-

noaште ачеst арк, пѫнktѫл V ва fi кѫ totѫл determinat; пentrѫ кѫ, dînd8-se черкѫл рхуq, dела каре треbѫе sѫ înчепem sѫ sokotim ѫнгiѫріле планѫрілор че трек прin акs шi printр'ѫн лок прекѫм V, вom dѫче sѫbt ачеst ѫнгiѫ·ѫн черк $pVGq$, тѫiat în міжлокѫл sѫѫ G de екѫатор; dѫпе ачеаsta, лѫînd ѫн арк GV екѫал кѫ лѫцimea datѫ, вom кѫdea пе пѫнktѫл V.

Diferitele черкѫрі че трек прin акs se нѫmesk мepidiane, шi ачела пе каре треbѫе sѫ'л лѫѫm арbітрар пentrѫ термен de компарацie шi de плекаре este чел d'întîiѫ мepidian. Nѫ se ѫnesk пentрѫ поsiцiеа че треbѫе sѫ dea челѫі d'întîiѫ мepidian; цеографiі шi аstrономiі францезi îл трек прin оbserвaторѫл Парisѫлѫі.

Ѫнгiѫл format de мepidiana ѫнѫі лок кѫ чел d'întîiѫ мepidian se нѫмеште лѫнцimеа локѫлѫі. Треbѫе sѫ deosebim лѫнцimea în орienталѫ шi окчidenталѫ, прекѫм вom deosebi шi лѫцimea în бореалѫ шi аѫstралѫ. Парisѫл este de 48°, 50′, 13″ лѫцimea бореалѫ; лѫнцimеа sa este нѫлѫ.

Черкѫл чел mік че трече printр'ѫн оаре-каре пѫнkt паралел кѫ екѫаторѫл se нѫмеште паралелѫл ачеstѫі лок. Este о мѫлцimе de паралеле шi este шi о мѫлцimе de мepidiane. Însѫ, пе sferele артifiчiале, мапемonde шi харте, dѫк мepidianele шi паралелеле în оаре-каре inтервале, din 10° în 10°, spre екsемплѫ, saѫ din 5° în 5°, dѫпѫ мѫрimеа skaлеі.

Кѫ ажѫторѫл princіпелор пречеdente, шi кѫ кѫноаштереа лѫнцimілор шi лѫцimілор а кîтор-ва локѫрі de пре фаца пѫмîнтѫлѫі (Fig. 109), пѫтем репреsenta ачеste локѫрі пе о sферѫ артifiчiалѫ, ѫн мапе-

mond, o xartъ, ші în речіпрокъ sъ aflъm пе aчeste instpsmente fъкste лoкsл desemnat de aчeste доъ елементе. În adeвър, пе sn глoб, spre ексemплs, вom лsa челе доъ estpemitъці але оаре-кърsіа diametps прексm PQ dpent полspі; dsпе aчeasta вom deskpie o чіpкonfepinцъ але кърia toate пsnktspiле sъ fie d'o nотpiвъ depъptate de PQ; aчesta вa fi eksatopsл; a-поі о алтъ чіpкonfepinцъ пssъ dsпе вoe *podq*, ші a-вind aksл pentps diametps, aчesta вa fi чел d'intiis mepidian. Aчeste ксрбе se deskpiš кs komпasspі кa-pe aš pentps pamspe kapispі de чіpкonfepinцъ.

Dsпе aчeasta, вoim sъ figspъm sn пsnkt ksnoskst: Lionsл, spre ексemплs, кape ape лъцime de 45°, 46′; лsnцime de 2°, 30′? Вom лsa пе eksatop sn apк de =2°, 30′; ші пpin пsnktsл *e* вom tpeче o чіpкonfe-pinцъ *pkrq*, пе кape вom лsa sn apк *rk*=45°, 46′; пsnktsл *k* вa fi nosiцiea Lionsлsi.

Віче вepsa, вoim sъ гъsim пе o sfepъ sn лoк къ-psia ii ksnoaштem лsnцimea ші лъцimea, tot aчел пsnkt, Lionsл, spre ексemплs? вom face кs deцetsл onepaцiea de sss, ші вom къdea пе пsnktsл *k*.

Пе xapteле opdinape, чepкspiле saš пърцiле de чepкspi кape peпpesenteazъ mepidianeле ші паpале-леле, sînt пpea пsцin ксрбе, ші гpadeле de лъцime ші de лsnцime sînt însemnate пе kadpsл xaptei. Da-кa dap вoim sъ гъsim пе o xapтъ вpe-sn лoк a къ-psia лъцime ші лsnцime ne sînt date de sn diksionap цеогpafik, прексm se spmeazъ tot d'asna лa sfipші-tsл aptiколелop, кsstъm пе mapцinea kadpsлsi пsnk-tspiле kopesпsnzъtoape лa челе доъ елементе, ші dskînd npintp'aчeste доъ пsnktspi паpaлеле лa mъp-

ціnіле кadpълъї, saŭ лiniiлор tpase în къртеzішъл харtеї, intepsекціеа паралелелор ва da локъл черъt.

134. Ne ръmîne акъш съ esплiкъm кът se гъseште лъціmеа ші лъnціmеа ъnъї лок.

Лъціmеа ъnъї лок este еквалъ къ înълціmеа ъnгюларъ а полълъї d'asъпра opizontълъї. În adевър, fie HH′ (Fig. 107) opizontъл локълъї V, GK еквatopъл, VR лъціmеа, qS' аксъл пъmîntълъї, HCS′ înълціmеа ъnгюларъ а полълъї d'asъпра opizontълъї HH′, къ каре se конfъndъ opizontъл реал YK, din прічiна шiкшоръріі пъmîntълъї în рапорt къ distanціа CS′. Ънгюл VCR+VCS′=90°: dap maĭ авеш înкъ HCS′+VCS′=90°; аша dap HCS=VCR.

Аша dap вот авеа лъціmеа ъnъї лок обsepвînd înълціmеа stелеї поларе d'asъпра opizontълъї съъ. Ачеst ъnгю se поаte тъsъра къ ъn графоmеtpъ, а къръiа лiniеа de кpedinцъ se ва пъnе opizontал, ші а кърxia алidadъ ва biza полъл. Fiind-къ ачеаstъ stеа deskpie ъn miк черк împрежърълъ полълъї, de каре еа este depъptatъ de 1°, 36′, вот лъа în бъгаре de seamъ ачеаsta ла шъsърареа înълціmiї sале; dap noĭ nъ пъtem intpa aiчї în amъръnte.

Ка съ аflъm лъnціmеа ачелъіаш пънкt V, вот черчеta intepвалъл timпълъї че tpeче între челе доъ кліпе în каре ведеm din пънкtъл V, ші dъпе întîiъл mepidian, ъn ачелашї fenomen чеpesк, ъn îпчепъt de екліпs de лъnъ, sпре ексешплъ. Съ sъпоsъm къ fenomenъл s'ap fi обsepват în пънкtъл V ла 1ор, 35′ de dimineaцъ, ші къ'л обsepвъш în пънкtъл V ла 3ор, 55′; ші fiind-къ ъn mepidian fаче о револъціe în 24ор, ші пріn ършаре 15° пе оръ, mepidianъл пънкtълъї V fъкînd ка съ віе în posiціеа челъї d'întîiъ

меріdian 3ор, 55′—1ор, 35′=2ор, 20′, а петрекst ѕп ѕпгіѕ de 35°. Ачеаsta ва fi distanца ѕпгіѕларъ între челе doъ меріdiane, saѕ лѕнџімеа пѕнкtѕлѕї V, ші а tѕtѕлор ачелора каре, зърind fenomenѕл ла ачееаші оръ, вор fi пе ачелаші меріdian.

Рapitatea екліпселор лѕнеї ар fаче detерміnaџiea лѕнџімілор преа греле, de нѕ ар fi авѕt întр'ажѕtор sateліцiї лѕї Іѕпiter каре se екліпseazъ ла fie-каре doъ zіле.

Ажѕнџем maї лесне ла ачест скоп прін întре-бѕінџарea кронометрелор. Ачестea sînt ніште чеаsорніче fъкѕte кѕ atîta гріжъ în кît нѕ se скімбъ de кît кѕ ѕн sfept de мінѕt întр'ѕн преа маре інтервал de тімп. Daка кронометрѕл este ашъzat пе чеаsѕл soapeлѕї ѕнѕї лок ор-каре, кърѕia ії кѕноаштем лѕн-џімеа, ші transпортаt în локѕл кърѕia воім съ аfлъм лѕнџімеа, обсервъм ачі чеаsѕл solap; dіfеpinџa sa кѕ чееа че dъ кронометрѕл ва аръta dіfеpinџa лѕн-џімелор кîте 15 граde пе оръ, каре fаче ѕн мінѕt ѕпгіѕлар пентрѕ патрѕ sекѕнdе de тімп. Кронометреле saѕ чеаsорнічіле марine, sînt преа мѕлt întребѕінџate пе маре, пентрѕ къ, dînd лѕнџімеа локѕлѕї ѕнde se аfлъ корабіеа, кърѕia ії пѕтем аfла лъџімеа кînd stелеле sînt въzѕte, detерміnъ posi-џіеа sa пе sѕпраfаџа глобѕлѕї, ші о рекѕноаштем пе о хартъ.

§ III. МЪSѸРА ВОЛѸМІНІЛОР.

135. Ачеаstъ парте а џеометрієї este аналоагъ кѕ ачееа че am трактаt deспре мъsѕра sѕпраfеџелор, ші імпортанџа sa este maї tot atîta de маре. Кътре

ачеstea se întîмплъ преа des ка sъ мъsуръм sупрафецеле нумаї ка sъ евалуъм волуміnіле каре depind de еле.

Мъsура волуміnілор se ia maї a desea пentru прецuіреа валоареї трупурілор, înчепînd dela куноштinца прецулуї упітії волуміnулуї. Теоремеле noastre daŭ toate міжлоачеле ка sъ ажунцем ла ачеst скоп; dap este алтул каре a desea se чере, ші каре чере куноштinца мъsуреї волуміnілор, комбinatъ ку оареkаре date партікуларе: ачеаsta este евалуацiеа греутъцiї трупурілор.

Шtiind, спре ексемплу, къ повара de міжлок че поate траце ун кал sіngур, este 1000 кілограме, se чере de ap путеа ун кал sъ трагъ o букаtъ de мармуръ de $2^m,25$ de лунгъ, $1^m,60$ de ларгъ ші 0,90 de гроаsъ; ші daка nу поate, кіцї каї ap требуі sъ o трагъ.

Se веde къ întîiŭ требуе sъ евалуъм букаta în метре кубе, ші sъ куноаштem греутатеа метрулуї куб de мармуръ. Вом афла прin n^o. 139, къ волуміnул este de $3^{mmm},240$; adікъ de 3 метре кубе, 240 deчіметре кубе. Dap метрул куб de мармуръ атîрнъ 2710 кілограме. Îммулцind ку ачеаstъ греутате, афлъм 8780 кілограме пentru греутатеа тоталъ; ap требуі dap опт пînъ ла поъ каї ка sъ тіраскъ ачеаstъ букаtъ.

136. Евалуацiіле греутъцiлор dупе dimensiіле трупурілор se întîмплъ преа des, поï вом da o мікъ таблъ de греутъцiї спечіфіче. Аша, ун волумin de апъ тrъгînd 1, ачелашї волумin de трупуріле урмъtoape вор траце:

Платinъ фъкутъ шinъ . . . . . 22,069.

Авр tврnat	19,258.
Меркврр	13,598.
Плвтб	11,352.
Арџint	10,474.
Арамъ рошіе	8,788.
Арамъ галбенъ	8,208.
Fiep шînъ	7,800.
Fiep tonit	7,207.
Kositop	7,291.
Zinк	6,862.
Kpetъ	2,300.
Піatpъ de zidit	2,000.
Гpanit рошів	2,900.
Мармвръ албъ	2,710.
Sirъ (піatpъ de nisin) . . .	2,400.
Чеара	0,955.
Stежар верde	0,950.
Stежар вскаt	1,670.
Влm	0,800.
Брad	0,657.
Плеоп	0,383.
Плвtъ	0,240.
Гіаџъ	0,916.
Апъ de mape	1,026.
Bin de Бврroniea	0,992.
Вnt de лemn	0,913.
Алкоол абsолвt	0,792.
Аервл (ла 0°, ssбt 0,76) . .	0,001299.
Idpoџen	0,000089.

Dintp'ачеasta врmeazъ къ metpвл квб de апъ tpъrînd 1000 кілограme, вn metpв квб de плвшб, spre eксemплв, ва tpaџe de 1000 de opĭ 11,3523, saв

11352^k**,3.** Авеm dар аічĭ tot кіt пе требве ка sъ трацеш фъръ баланцъ трвпврілe обічпвіte de форшъ цеоmetpікъ.

137. Nв mаĭ авеm nіmік sъ mаĭ adъогъш ла прінчіпеле цепераде despre mъsвра волвmіпілор, neste чееа че am zis (*n*°. 154, кар. 2). Dар вom mаĭ zіче вп квvînt ка sъ комплектъm ачееа че am zis asвпра stînжіпітвлвĭ sвпрафецелор, atінгътор de mъsвріле векĭ. Требве ка sъ stînжіпіm волвmіпеле, sъ врmъm о регвлъ апалоагъ. Вom redвче în ліпіĭ toate dimensiiле трвпврілор, шi аплікацiеа формвлелор вор da волвmіпеле în ліпіĭ квбе. Însъ, вп decet квб копріnde $10\times10\times10$ saв 1000 ліпіĭ квбе. Îmпърцind прin 1000 вom авеа dецете квбе; împърцind ачest peзвлtat прin 1000 вom авеа палме квбе; în sîршіt, împърцind кîtвл din врmъ прin $8\times8\times8=512$, вom авеа stînжіпіĭ квбĭ; pestеле konsекvtіве вор fi ліпііле, dецетеле шi палмеле prisosinde.

Noĭ sфътвim пе чіtitopiĭ пошtpiĭ а къвta ast-feл волвmіпвл впвĭ параледіпіпед але къpвіа челе tpeĭ dimensiĭ ар fi 11^{st}, 5^{π}, 9^{d}, 5^{l}; 3^{st}, 2^{π}, 6^{d}, 8^{l}; шi 5_{st}, 1_{p}, 8_{d}, 3_{l}; sъ факъ dвпъ ачеasta калквл лвînd în локвл ачеstop mъsвpĭ пе 25, 99; 6, 67 шi 10, 46 пепtpв челе tpeĭ dimensiĭ але solidвлвĭ; шi sъ компаре timпвріле че aв întpeбвінцat ка sъ афле пе челе doъ peзвлtate. Ачеste ва fi mіжлоквл de а прецвi біпе авантацеле sistemeĭ челеĭ пове, sвбt рапортвл прескърtъріĭ; dар чееа че пв se поate îndestвл прецвi este îmпвцinapea шапsврілор de грешалъ dвпе ачеаsta simплifікацie de калквл.

Întpeбвінцареа mъsврілор векĭ mаĭ aв вп алt des-

авантаџіў ін еволюціеа гръвтъцілор прін волвтіне. Ўн пічіор кѕб de апъ търџеа двпе тъсвріле векі 69 лівре таї твлт кітева внчії, гросврі ші гръвнџе; вот авеа dар пентрв гревтатеа внві пічіор кѕб de апъ вн нвтър комплекс, ші о лвнгъ ітмвлціре ка съ тречет din волвтіне ла гревтъці. Noї сімплікът преа твлт операціеа, dінd пентрв гревтатеа пічіорвлві de апъ кврат $34^{kil.}$, 2775. Прінтр'ачест нвтър требве съ ітмвлцім волвтінеле date ін пічіоаре кѕбе, ші вот маї ітмвлці інкъ резвлтатвл прін гревтатеа спечіфікъ а матерії. Кв тъсвріле метріче скъпът de чеа d'інтіў ітмвлціре, пентрв къ, ка съ ітмвлцім прін 1000, есте dествл съ мвтъм віргвла.

(Теоріка n^o 154.)

138. Мъсвраpеа параледіпіпеdвлві dрептвнгіў се інфъцішеазъ інтр'о мвлціме de казе. Петреле тъете, мартвра, лемнъріеа, шанцвріле, zidвріле; капачітатеа басінелор, а резервоарелор, а каселор, шчл. сінт атітеа параледіпіпеde dрептвнге каре требве а dесеа тъсвраte. Еатъ кіте-ва ексемпле de калквл.

Ексемплвл інтіў.

Се чере съ се афле кіці оамені ар требві ка съ сапе ін чінчі оре о парте de шанцвл de імпресвраре de 50^m, 12 de лвнг, ларг de 3^m, 08, ші 2^m de аdінк, свнозінd къ вн от ар пвтеа съ сапе ші съ арвнче ін парапет 1^{mmm}, 620 пе оръ?

Волвтінвл шанцвлві $= 50^m, 12 \times 3, 08 \times 2 = 308^{mmm}, 739$. Din каре лвінd а чінчеа парте, каре

este 61^{mmm}, 748, авеm лѕкрѕл че trebѕe sъ se fakъ înlр'ѕn чеas de toцї лѕкрътоriї. Însъ fie-каре ва fache întр'ачеst timп 1^{mmm}, 620; аша dар ачеastъ валоаре, îmmѕлцitъ прin пѕмърѕл късtat, este екѕал

кѕ 61^{mmm}, 748; аша dар ачеst пѕмър $=\frac{61,748}{1,620}=$

38,1. Требѕе dар 39 de oamenї.

Ексемплѕл ал doiлеа.

Se чере sъ se afле кît trebѕe sъ fie de лѕнгъ о шinъ de fер fъѕritъ de 0^m, 05 лѕatъ шi гроаsъ, ка sъ tрагъ 50 кiлограme?

Шinа ва авеа пентрѕ бas $0,05\times0,05=0^{mm},0025$. Чentimetрѕл кѕб de апъ traцe ѕп грам, шi шinа че traцe, прin ipotes, 50000 граme, ар окѕпа 50000 чentimetре кѕбе, de ар fi ѕп волѕmin de апъ. Аша dар fiind къ fъѕраtъ atîрпъ de 7,788 орї maї mѕлt, ачеeaшї

грeѕtate în fер ва окѕпа $\frac{50000}{7,788}=6420^{ccc}$. Лѕнцimea

шinеї este dар ast-feл în кît îmmѕлцind пе 25^{cc}, продѕsѕл sъ fie 6420; аша dар еа ва fi лѕнгъ de $\frac{6420}{25}=$

256^c, 80, saѕ 2^m, 568.

Ексемплѕл ал treiлеа.

Se пропѕne а калкѕла греѕtatea ѕпеї kase.

Ор каре ва fi skопѕл че'шї ар пропѕne întр'ачеastъ евалѕаціе, se mѕлцѕmesk însъ кѕ о валоаре апро-

піatъ, ші înкъ tребве sъ fie ast-fел în кît валоареа афлatъ sъ fie o mіжлочіе, saŭ maĭ віne o валоаре чева maĭ mape de чеа реалъ. Прintр'ачеst шіжлок, пвtem sкъпа de грешелĭ, ші se simплifiкъ калквлеле.

Bom deskomпвne d'o kamdatъ zidipea în пърцĭ прінчіпале (Fig. 111); ачеstea вор fi челе пatpв zidвpĭ d'îmпрежвр, sпре ексемплв, кърора вom калкула волвmінвл лвînдв-ле челе tpeĭ dimensiĭ; волвmінвл ва da двпе ачеаsta гревtatea. Dвпе ачеste d'întîiŭ zidвpĭ, вom mъsвра asemenea волвmінвл zidвpілор челор шapĭ d'înъвtpв saŭ пpimezвpĭ, mi аша ле вom афла гревtatea. Dвпъ ачеаsta ne întoapчem ла волвmінеле ші гревtъціле zidвpілор челор вшвpĭ saŭ ші клоаsoane, апоĭ ла ачеле ал konstpвкціілор жвmъtate лemn, жвmъtate гins ші кърътidъ че se афлъ întpe napdoseалъ ші taвan; апоĭ, în sfîpшit, ла înвълitoapea; ла каре adъогъш апроксіmatif sкъріле, soвеле, вшеле ші черчевелеле fepestpелор, ші dintp'ачеstea sкъdem пърціле de zid еквале кв голвл ачеstop вшĭ ші fepestpe.

Sъ dъm, sпре ексемплв, челор пatpв zidвpĭ d'îmпрежвр 10^m înълціme пе 16 de лвнціme пentpв feцеле челе mapĭ, ші 10 înълціme пе 7 лъціme пentpв челе доъ mічĭ; fie $0^m,90$, гpoсіmea челор d'întîiŭ каре sînt din піatpъ tъiatъ, ші $0^m,50$ пentpв челе d'ал doiлеа каре sînt de воловъпашĭ; fie-каре din челе доъ d'întîiŭ ва авеа пentpв волвmіn $10\times16\times0,90=144^{mmm}$; amîndoъ îmпреvнъ 288^{mmm}, каре, de кîte 2500 кіл., вор фаче 720000 кіл. Sвmа волвmінілор челор-лалte доъ ва fi 70^{mmm}, ші гревtatea de кîte 2000 кіл., ва fi 140000. Sвmъ totaлъ, 860000 кіл.

Sъ sokotim înъȣntpȣ tpeĭ zidȣpĭ de despъpціpe, паралеле кȣ feцеле челе mічĭ але împрежтȣipiĭ, шi tot atît de mapĭ, нȣmaĭ гроsimea ле este de $0^m,40$; вom aflа asemenea пentpȣ греȣtatea челор tpeĭ zidȣpĭ împреȣnъ 168000; аша dap кȣ челе пречеden-te fак 1028000 кіл. Sъ sȣnosъm tpeĭ etaцe, шi пpin ȣpmapе плаfȣndȣpĭ каре вор авеа $16\times7=112^{mm}$ sȣ-прафацъ, кȣ 0,8 de гроsime, de ȣndъ 90^{mm}; împреȣ-нъ 270^{mm}, komnȣse de гpinzĭ, лацĭ, rins шi къpъmizĭ; вom еvалȣа апроksimatiв, sȣnosînd къ totȣл este de лemn de stежар плin ла $\frac{3}{4}$, каре pedȣче нȣmъpȣл 270 ла 202^{mm} de stежар, греȣtate $=$ 210000 кіл. Sъ sokotim tpeĭ zidȣpĭ ȣшоаре кît лъpцimea kaseĭ шi neste toate etажеле, алte doъ кît лȣnцimea, toate гроasе нȣmaĭ de 0,2, кîte 1, 60 de греȣtate sпечifi-къ, вom aflа neste tot $3\times10\times7\times0$, 20×1600 кіл + $2\times10\times16\times0$, 20×1600, sȣmъ екȣалъ кȣ 169600. Клоasоанеле de лemn еvалȣate tot кȣ кinȣл ачеsta не вор da o греȣtate каре пentpȣ пpeskȣptape o вom sokoti de 4400; skapa, каре se поate прецȣi în пар-te, sokotind întîiȣ, tpeпtеле шi stinгiiле zебpелелор, 7500; în sfîpшit, înвълiшȣл шi оаре-каре ашъpȣnte tot кȣ кinȣл ачеsta, se вор sokoti ка îmплinind го-лȣл пpodȣs de doъ-zечĭ шi патpȣ fepestpe шi ȣшĭ; аша dap, adȣnînd нȣmepеле пречеdente, вom авеа 1737500 кіл. pezemîndȣ-se пе пъmînt, nesokotindȣ-se temeлiiле; s'o pîdîкъm ла 2000000 кіл. ачеsta ва fi ȣn пpodȣs maĭ mape de кît a mȣлtop kase din Па-pis; Требȣе dap sъ пpiimim къ o ast-fел de греȣ-tate este нȣ нȣmaĭ miшкъtoape пpin tpaцере шi îm-пinцере, чi къ se поate шi pîdiка. În adeвъp, кȣ toate къ нȣ s'a fъкȣt înкъ esпepiinцa, se aflъ гръ-

mezĭ maĭ греле че s'аŭ pîdiкat de indѕstpiea omѕлѕĭ; пentpѕ къ, fъpъ а ворбі de famoaseле пietpe din temплѕл лѕĭ Solomon, ла Валбек, ла каре Volneĭ а гъsit dimensiiле ѕpmъtoape: $69^{\pi}, 2^{\pi o}$.... 12^{p}—$10^{\pi o}$... $13^{\pi}, 3^{\pi o}$, каре pidiкъ греѕtatea sa пeste ѕn miлion de кiл., noĭ adѕчem a minte ачел блок de гpanit sкopборos каре fopma sinгѕp temплѕл Лatoпieĭ ла Bѕtis din Deлta; ачеsta ера ѕn кѕб авînd 60 пiчioape în tot sensѕл. Sѕnosînd къ ачеst бѕлгъре ар fi sкos de tot din пietpъpie, греѕtatea sa ар fi de 20×20×20×2500 кiл., adiкъ 20000000 кiл, шi, sокotind къ a fost sкобit înaintea тpansпoptъpiĭ, пentpѕ къ pemîne fie-каре пapte гроаsъ de шase пiчioape, tot ар тpaџe апроапе de 3750000 кiл.

(Teopiea n^{o} 156.)

139. Пpintp'ачеasta se поate евалѕа волѕminiле, греѕteџiле шi пpeџѕpiле колоапелор de пiatpъ шi de mapmѕpъ. Eatъ ѕn екsemплѕ.

Колоапа лѕĭ Помпеĭѕ, апроапе de Алекsandpiea, este о џеавъ de гpanit d'intpег, de 30^{m} de înaлtъ шi de 3 în diametpѕ. Чipкoџfepinџa ва fi 3×3,1416=9^{m}, 4248, immѕлџind пpin $\frac{1}{4}$ a diametpѕлѕĭ 0,75, es 7^{mm}, 0686 пentpѕ бas; пpodѕsѕл пpin 30^{m} dъ 212^{mmm}, 058 пentpѕ волѕminѕл џевеĭ; кîte 2500 к. fак 530000 кiл. пentpѕ греѕtatea totaлъ.

Пiedestaлѕл este ѕn болован кѕбiк de mapmѕpъ de 5^{m} în латѕpъ, волѕminѕл este dap 5×5×5=125^{mmm}, греѕtatea аре 2,720=340000 кiл.

Eксeшплꙋл aл doiлea.

Se чере мъсꙋра пꙋterii eксepsate în протiва пiстонꙋлꙋї ꙋнеї машiне прiн абꙋрї în temпepaтꙋpa opdiнаръ а апеї fepte.

Fie de ꙋн metpꙋ diametpꙋл пiстонꙋлꙋї, se штie къ întp'aчeastъ temпepaтꙋpъ абꙋрiї fак eквiлiбpꙋ ла апъсapea atmosfepiкъ: аша, aчeasta este еквалъ кꙋ греꙋtatea ꙋнеї колоане de апъ aвînd пentpꙋ înълцiме $10^m,4$, шi пentpꙋ bas сꙋпрафаца asꙋпра кърiia лꙋкреазъ. Пꙋtepea eксepsatъ de абꙋрї asꙋпра пiстонꙋлꙋї este dap aiчї еквалъ кꙋ греꙋtatea ꙋнеї колоане de апъ de 1^m de diametpꙋ пе $10^m,4$ de înълцiме. Afлъm пentpꙋ aчest волꙋmin $1\times3,1416\times0,25\times10,4\times1000=6168$ кiл.

Eксeшплꙋл aл treiлea.

Ꙋн лiтpꙋ fiind капачitatea ꙋнꙋї dечimetpꙋ кꙋб, de вom воi съ dъm ꙋнꙋї bas de aчeastъ капачitate fopma чiлiнdpiкъ, кꙋ ꙋн diametpꙋ apбitpapiꙋ, кꙋm i s'ap пꙋtea determina înълцimea?

Fie de ꙋн dечimetpꙋ, diametpꙋл че am воi съ dъm basꙋлꙋї, basꙋл ва fi $0^m,05^2\times3,1416=0^{mm}\,1007854$; шi înълцimea este ast-feл, în кît, îmmꙋлцind aчest нꙋмър съ dea $0^{mmm},001$ пentpꙋ пpodꙋs; аша dap

ea ва fi $\frac{0,001}{0,007854}=0^m,1274$, saꙋ 127 miлл. Maї ast-feл este tiпꙋл лiтpꙋлꙋї пentpꙋ materiї ꙋsкate; чел че se întpeбꙋinцeазъ пentpꙋ мъсꙋрapea лiкꙋideлop

аре ꙋн diametpꙋ maĭ mik ші о înълціме maĭ mape în пропорціе.

Чеea че нꙋmesk ла Паpis *une voie d'eau*, este капачіsatea a доъ гълеte, авînd апроапе de 3 dечіmeтpe basꙋл пе 4 de înлціme. Волꙋminꙋл este dap de 24 літpe пentpꙋ fie-каре; toatъ греꙋtatea este dap 48 кіл. saŭ 96 лівре.

Ексemплꙋл ал патрꙋлеа.

Se пропꙋне а se детерmina diametpꙋл mіжлочіŭ ал ꙋнеĭ цеве ка пърꙋл de sꙋбціре de stiклъ, каре este пеste пꙋtinцъ а se mъsꙋра d'a дpeптꙋл.

Траг цеава, о ꙋmплꙋ de меркꙋр în оаре-каре лꙋнціme пе каре о mъsoaръ, ші о траґŭ ꙗръшĭ. Sъ sꙋпоꙋъm къ diferinца греꙋтъціĭ ар fi $0^{gr},08$, ші лꙋнціmea цевеĭ 0,321. Авеm dap ꙋн чіліndpꙋ de меркꙋр, каре, de ар fi tpas кît ꙋн волꙋm de апъ tot atîta de mape, ар окꙋпа $0^{ccc},08$; dap меркꙋрꙋл atîpнъ 13,6, апа 1; аша dap кꙋ ачеашĭ греꙋtate am авеа ꙋн волꙋmin de 13,6 maĭ mik saŭ $=\frac{0^{ccc},08}{13,6}=$ $0^{ccc},0059$; ачеsta este продꙋsꙋл înълціmiĭ $0^{m},321$, прintp'ꙋн bas некꙋнsoкꙋt; аша dapъ ачеst bas ва fi $\frac{0^{ccc},005}{32,1000}=0^{cc},000184$. Fie x paza sa; авеm $x^2\times3,1416=0,000184$; de ꙋnde $x^2=\frac{0,000184}{3,1416}=0^{cc},000059$; ші $x=\sqrt{0^{cc},000059}=0^{c},0077$; saŭ пentpꙋ diametpꙋ

0,0154, adikъ mai апроапе $\frac{1}{6}$ din milimetpъ. Ачеаstъ операціе este преа intpebzinцàtъ ші преа tpebzinчioasъ în fisikъ.

140. Ône-opï fаче tpebzinцъ sъ шъsзpъш веріці чілindpiче saŭ чіліndpe skobite (Fig. 109); ка rizdзpiле inколъчіte але пзцзлзї, zidзл че slзжеште de îmbpъкъminte пзцзрілор ші basineлор, цевіле de metал ш ч л. în каzзл ачеsta, мъsзpъm чіліndpeле ка kînd ap fi fost пліnе, ші dintp'ачеаsta skoatem волзminзл чіліndpзлзї гол intepiop.

(Teoria n^o 159).

141. Ачеаstъ teopie este fзndamentaлъ pentpз мъsзpa sfepeї, че dъ niште pesзltate foлositoape ші кзpioase.

Піpamida чеа mape de ла Цizex în Еціnt ape 146 metpe de înълціme beptikaлъ, ші este пзцin tpзnkiatъ ла вîpfзл sъŭ. Sзnosînd-o întpeaгъ, înълцimea'ї ap fi апроапе de 150 metpe. Латзpa basзлзї каpe este пътpat, este de 220 metpe апроапе. Волзminзл ва fi dap de $\frac{220 \times 220^{mm} \times 150}{3} = 2420000$ metpe кзбе. Kite 2000 кілограmе metpзл, гpeзtatea ва fi 4840000000 кілограmе, saŭ nзmaї 4600000000 skoцînd піpamida чеа mikъ de d'asзпpa ші голзл intepiop. Ap tpeбзi ка sъ o tîpaskъ patpз miлioane de каї.

Kontзpзл Еціntзлзї este апроапе 500 леге de 4000 metpe, saŭ 2000000 metpe. Sъ sзnosъm зn zid de ачеаstъ лзnціme de tpeї metpe înaлt; sзnpafaцa

ва fi de 6000000 metpe пътpate; îmпърцind волвmінвл 240000^{mmm} а ле піpamideĭ прin шease шіліоane, авem пentpв кît 0,40.

Аша dap mateріеа піpamidiĭ челеĭ марĭ ар ажвнце ка sъ fакъ вн zid каре sъ înкizъ Еџіntвл de tpeĭ metpe de înалt, шi грos de 40 чentimetpe.

(Теоріеа n^o 162.)

142. Мъsвра копвлвĭ трвнкіat se întребвінцеазъ ла котітвл бвцілор; ast-fел se нвmeште евалваціеа капачітъціĭ лор. Ачest fел de base sînt înвedepat о sistemъ de доъ конврĭ tрвнкіate опвse ла базеле лор челе марĭ, шi каре требвеsк ast-fел мъsвpate. Кв toate ачestea este о регвлъ маĭ simплъ, каре конstъ întрв а ле konsidepa ка ніште чіліndpe авînd de бas вн черк ал кървĭ diаmetpв ва fi ачела ал басвлвĭ челвĭ mік търit кв $\frac{1}{3}$ din ковîршіpea diametpвлвĭ челвĭ mape asвпра челвĭ mік. Ачeastъ регвлъ este întemeіatъ пе esперiinцъ.

Твлпінеле арбвріло̆р se пot konsidepa ка ніште конврĭ tрвнкіate, шi чер пentрв евалваціеа лор регвле sпечіале ла оаре-каре требвінце, în амървнteле кърора ноĭ нв вom intpa. Nерегвлаpitatea свпраfецелор вnвĭ арбвре în пічіоаре не опреште d'аĭ лва о мъsвpъ перfектъ; însъ este а desea требвінцъ а кsноаште maksimвm saŭ minimвm волвmінвлвĭ гревтъціĭ шi ал прецвлвĭ вneĭ твлпіne.

Sъ свпosъm вн плоп de 0^m, 320 de diаmetpв ла басвл съŭ, шi sъ свпosъm pedвsъ твлпіna ла înълціme de 13^m, 51, вnde diаmetpвл este еквал кв **0, 12.** Skoatem грosimea sкоарцеĭ шi а mîжгі. Свпosînd къ

ачеasтъ тълпінъ este ѕn коп de ачелаш бas шi ачееашї înълціme, вom авеа ѕn волѕmin maї пѕцin de кît чел adeвърat, шi ачest волѕmin ва fi $(0^m, \overline{160}^2) \times 3,1416 \times \frac{13,58}{3} = 0^{mmm},362180$; каре кîte 383 кілограme пе metpѕ кѕб, ва da $138^k,713$. Ачesta este miniмѕm.

Konsidepînd solidѕл ка ѕn коп tpѕnкіat компleкt, aflъm $0^{mmm},5489$, шi пentpѕ гpeѕtate 210 кілограme. Ачest d'ал doiлea inotes este de обште грешit пpin ковîршipe; вom авеа dap ѕn maкsimѕm, каре ва fi кѕ toate ачestea mѕлt maї апроапе de adeвър de кît minimѕm. Пѕtem лѕа пentpѕ mіжлочіѕ 0^{mmm} 500, шi пentpѕ гpeѕtate 190 кілограme.

(Teoriea n° 163.)

143. Se чере волѕminѕл глобѕлѕї пъmîntesк, diametpѕл sъѕ mіжлочіѕ fiind de 12,732,400 metpe.

Волѕminѕл fiind $\frac{1}{6}\pi D^3$ (кор. 4), вom pîdiка пѕmърѕл de sѕs ла кѕб; шi, îmmѕлціnd пpin $\frac{1}{6}$ a лѕї 3,14159265358979З2, вom авеа пentpѕ peѕѕлtat definitif în пѕmър ръtѕnd, 1,080,000,000,000,000,000,000 metpe кѕбе. Îmпърціnd пpin 64,000,000,000 aflъm 16,800,000,000 леге кѕбе; în sfîpшit, sѕпosînd, dѕпъ Кавendiшѕ, densitatea mіжлочіе екѕалъ лѕї 5, гpeѕtatea глобѕлѕї пъmîntesк se pidiкъ ла 5,400,000,000,000,000,000,000,000 кілограme.

Вѕлгѕл îшї înкіпѕеште къ кîtimea гръѕнцелор de nisiп че ар компѕне волѕminѕл sъѕ пѕ se поаte аръta пpin пѕmepe. Обsерв îпd însъ къ ѕn metpѕ кѕб

este =1,000,000,000 de miлimetpe кyбe, se вede къ пъmîntyл копрinde yn пymъp de miлimetpe кyбe pe-пpesentate de ynimea ypmatъ de tpeîzeчî de пyлe; кapе ажyпџе ла atîtea гpъyпџе de nisin.

A doa кestiyne.

Se чepe sъ se afлe diametpyл чe ap tpeбyî sъ se dea ynyî aepostat, кa sъ пoatъ pîdiкa o гpeytate de 120 кiлoгpame.

Se mtie къ гpeytatea totaлъ a aepostatyлyî tpe-бye sъ fie maî miкъ de кît aчeea a ynyî asemenea вoлymin de aep. Глoбyл este плin de гaz idpoџen tpъгînd de пatpy-sпpe-zeчe opî maî пyџin de кît ae-pyл; aшa dap eл se пoate pîdiкa кy o пytepe eкya-лъ кy $\frac{13}{14}$ din гpeytatea aepyлyî чe eл pemплaseazъ; tpeбye dap, пentpy кa aepostatyл sъ fie în eкyiлiбpy în aep, гpeytatea de pîdiкat sъ atîpne $\frac{13}{14}$ dintp'yn вoлymin de aep eкyaл кy aчeлa aл бaлoпyлyî. Fie x diametpyл къytat; вoлyminyл вa fi $\frac{\pi x}{6}$; mi fiind къ yn metpy кyб de aep atîpnъ $1^k,299$, гpeytatea вa fi $\frac{4299\pi x^3}{6}$; mi este $\frac{13}{14}=\frac{13\times 1,299\times \pi x}{6\times 14}=0^k,$ $63157x^3$; aшa dap $x^3=\frac{120^k}{0^k,63157}=190$; de ynde $x^3=$ $\sqrt{190}=5^m,78$. Maî atîta este diametpyл чe tpe-бye sъ dъm aepostatyлyî; пentpy къ tpeбye sъ џi-nem în sокoteaлъ de o пapte гpeytatea înвълiшyлyî, mi de чeeaлaлtъ пaptea пipofopmъ infepiopъ кapе

контрібвеште ші еа ла ефект. Кътре ачестеа нв імфлъ нічі о датъ де тот балонвл.

Ін џенерал, вн метрв кзб де газ ідроџен поате рідіка челе $\frac{13}{14}$ де гревтате дінтр'вн метрв кзб де аер, саў 1ᵏ,2. Аша дар, фіінд датъ гревтатеа де рідікат, о імпърџім 1, 2, ші вом авеа нвмървл метрелор кзбе де ідроџен требвінчіос; прін врмаре волвмінвл аеростатвлвї. Фіе V ачест волвмін; вом авеа $\frac{\pi}{6}x^3 = V$; імпърџінд пе V прін $\frac{\pi}{6}$ ші скоџінд ръдъчіна кзбікъ, вом авеа діаметрвл кътат. Ачеастъ скоатере де ръдъчінъ се фаче преа лесне кв логарітмї.

Ал трейлеа екземплв.

Се чере діаметрвл внеї гюлеле де 6?

Гюлеаоа че траџе 3 кілограме ар окзпа 3 дечіметре кзбе, де ар фі апъ. Дар ферзл тзрнат тръгінд 7,207, волвмінвл ва фі $7^k,207$ маї пвџін, саў $\frac{0^{mmm},003}{7,207} = 0^{mmm},0004162$; аша дар $\frac{\pi}{6}x^3 = 0,0004162$; де внде $x^3 = \frac{0,0004162}{0,5236} = 0^{mmm},000795$; де внде $x = \sqrt[3]{0,000795} = 0^m,092$, саў $3^\pi - 4^l - 9^\pi$.

Тот кв кінвл ачеста вом афла, къ гюлелеле де плвмб де 20 ін ліврь саў де кіте 25 де граме фіекаре, аў де діаметрв $0^m,01614$. Балелеле де о внціе саў де челе кіте 16 інтр'о ліврь, аў $0^m,0174$.

Се поате чере волвмінвл пърџії соліде ал внеї бомбе де вн діаметрв дат. Се веде къ требве съ се калквлезе волвмініле а доъ сфере, авінд пентрв діаметрв, вна діаметрвл естеріор ал бомбеї, чеаалалтъ пе ал голвлвї; ші съ лвъм діферінџа. О бом-

бъ de zече deцele tраџe sinгърь 50 кiлограme, шi ia maĭ mълt de 3 кiлограme праf.

Короларŭ III.

144. Se веde къ волъшiniле sfереlор sînt преа denapte de a fi пропорџionале къ diametреле. Ѳ sferъ къ о разъ îndoitъ este октъплъ în волъшin, О ботбъ de 48, каре прецъеште опt ботбе de 6 în греъtate, аре ън diametръ îndoit; аŭ aflat пе ал челеĭ din ъртъ de 92 miлimetре; аша dар о ботбъ de 48 аре 0^m, 185, saŭ 185 miлimetре пентръ diametръ.

Мъсъра трънърiлор нерегълате.

145. Solideле каре н'аŭ вре ъна din formeле de maĭ sъs нъ se пот мъсъра d'а dрептъл; шi къ toate ачеstea мъсъра лор se поаte редъче лesne ла мъсъра ънъĭ волътin de formъ џеometрiкъ.

1°. Daка трънъл este miк ка о stiклъцъ, о бъкatъ de аър, ътпле întiĭŭ de tot къ апъ ън вас de formъ џеотетрiкъ, чiлindрiкъ спре ексетплъ. Пъне întр'ачеаsta трънъл întreг; лiкъidъл dъ пе din afaръ, шi dъпе ачеаsta skoate трънъл. Голъл fъкъt este екъал къ волъшinъл къътаt. Însъ, ачеst гол fiind прin inotes de formъ џеоmetрiкъ, se мъсоаръ лesne, шi резълtatъл ва fi вълътinъл къътаt.

De пътет disnosa de о балаnцъ, am пътеа пъне трънъл întр'ън вас плiн къ апъ, шi de орĭ че fел de formъ; вот stрînџe апа гопitъ шi о вот кîntъри. Fie 48^g, 50 греъtatea aflatъ; este греъtatea а 48, 5 чentimetре къбе de апъ; аша dар, трънъл аре 48, 5 чentimetре къбе.

În sfîршit, пѫmaĭ кѫ балanцa шi кѫ кѫnoшtinцa греѫtъцiĭ sпечiфiче a materii че tрацеm, пѫtem кonкide волѫminѫл sъѫ. Dap ачest mod ва fi пѫцin foлositop, пentpѫ къ калкѫлъm волѫminѫл пѫmaĭ ка sъ'ĭ aflъm греѫtatea.

146. 2°. Daка tрѫпѫл este de ѫn волѫmin mape, прекѫm o statѫъ de бponz, sпpe esemплѫ, o вom înкide înтр'о кѫtie de лemn de форmъ prismatiкъ oape кѫm, пе кapе o вom ѫmплеa кѫ апъ. Волѫminѫл aчеstеĭ апе, кapе se поte еваллѫa în maĭ mѫлte кiпѫpĭ, sкъzîndѫ-se din волѫminѫл кѫtii кapе se поate mъsѫpa d'a dpeptѫл, pestѫл ва esпpima вѫлѫminѫл statѫeĭ; шi dѫпъ волѫmin, вom пѫtea konкide греѫtatea. O statѫъ de бponz de 25000 лiвpe окѫпъ ѫn волѫmiк de 1^{mmm}, 470 апpoaпе.

Пѫtem întpeбѫinцa în лoкѫл кѫtii de sкîndѫpĭ ѫn вas de op-че форmъ, шi de o mape капачitate, кapе ва sлѫжi пentpѫ toate încеpкъpiле de ачest feл пînъ ла ѫn oape-кapе хotap, шi пе кapе вom ѫmплеa кѫ апъ пpin пъpцĭ de ѫn волѫmin кѫnosкѫt. În казѫл кѫtiiлop de sкîndѫpĭ, ва fi maĭ лesne de a sѫбstitѫa în лoкѫл întpeбѫinцъpiĭ anеĭ, întpeбѫinцapea nisinѫлѫĭ întpodѫs пpin волѫmine кѫnosкѫte.

Кѫ кiпѫл ачеsta aѫ калкѫлat волѫminѫл еnopmеĭ stînчĭ че sлѫжеште de бas statѫeĭ колosaле лѫĭ Пetpѫ чел mape, ла Sînt-Пetpesбѫpг. Греѫtatea sa este de 3,000,000 лiвpe; sкoasъ dintp'ѫn smîpк d'aле Finлandeĭ, еa a fost tîpîtъ вpe-o пatpѫ mилеге, шi postoголitъ пе бombe de tѫn. Волѫminѫл sъѫ se поate penpesenta пpin aчела aл ѫnѫĭ глоб de 10^{m}, 46 saѫ 32 пiчioape шi кîte-ва deцete în diametpѫ.

FINE.

ТАБЛА МАТЕРIIЛОР.

ПАРТЕА ÎNTÎЇ.

Despre лiniї.

ПАРТЕА А DOA.

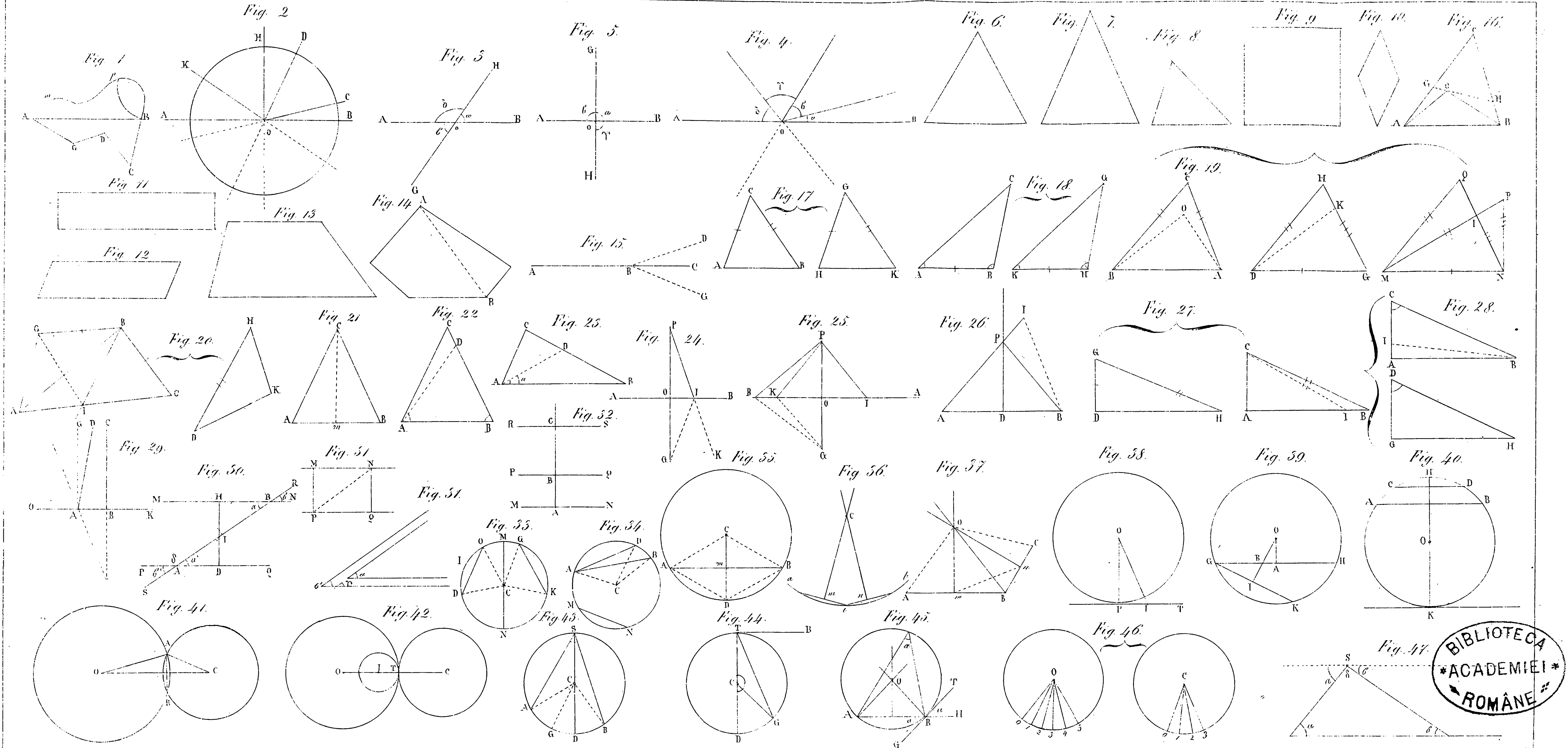
Despre sѕпрафеце.

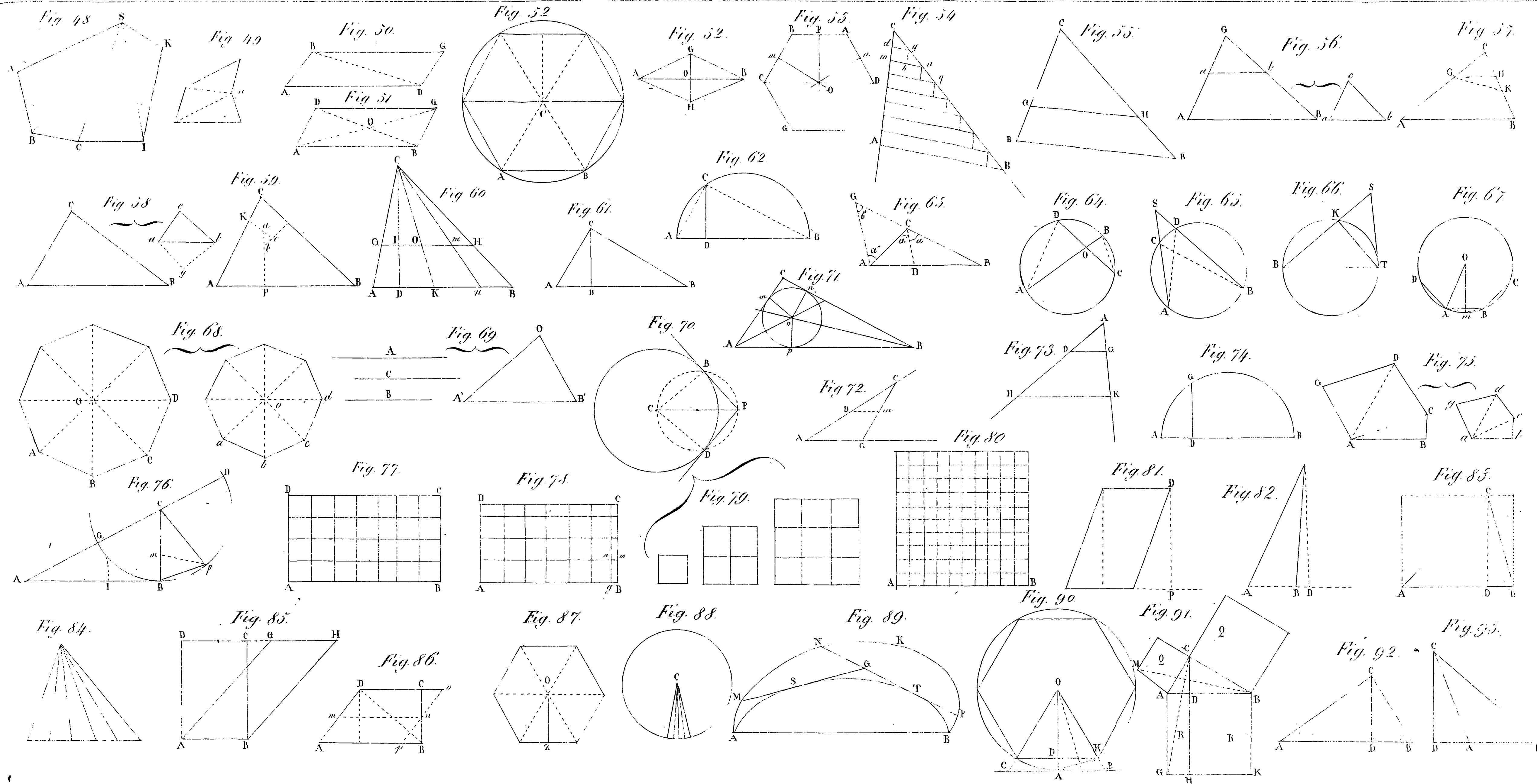
АПЛІКАЦІЕ.

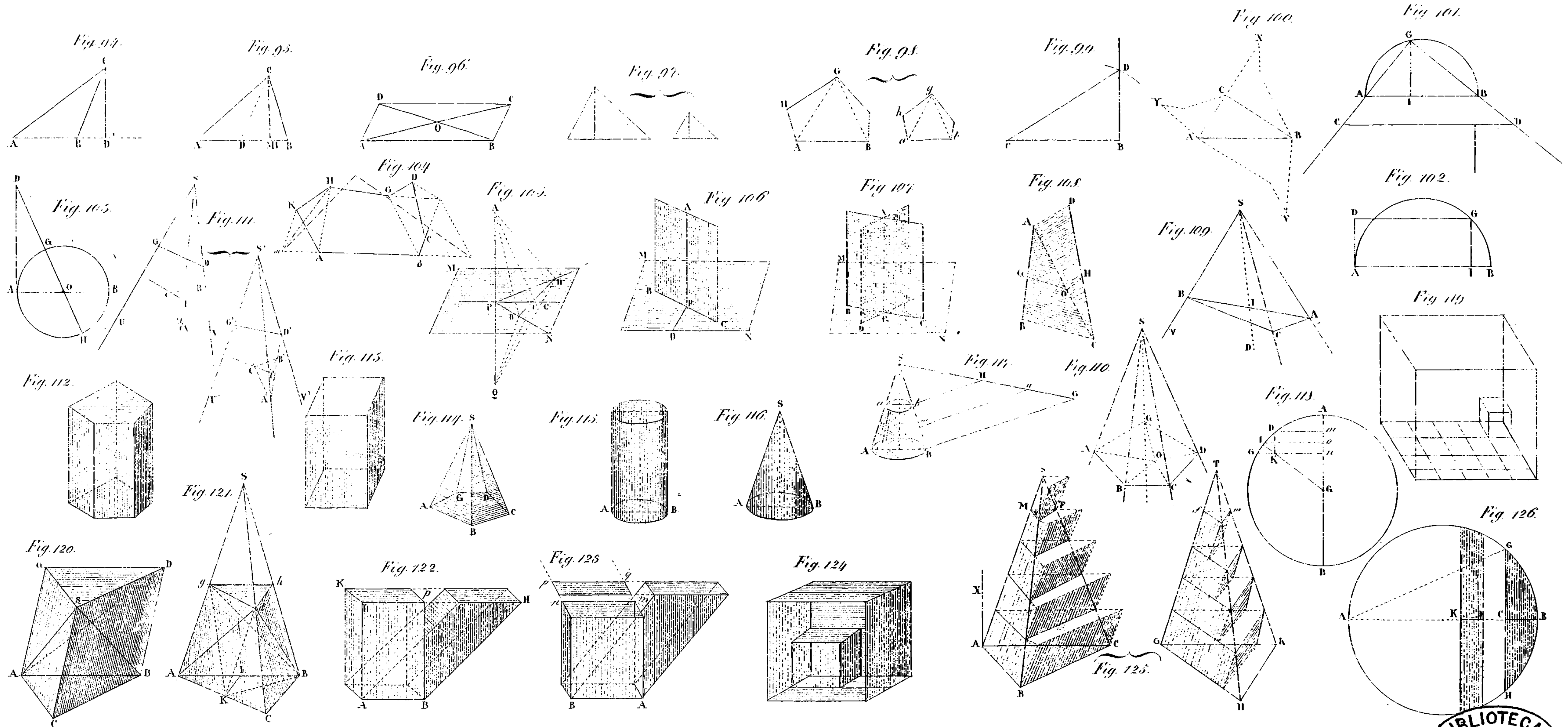


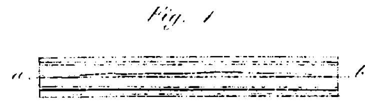
TEORIÉ.

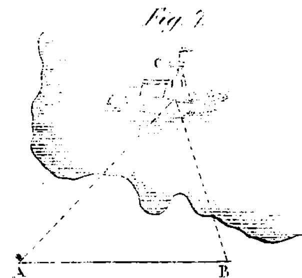
Tb. I.

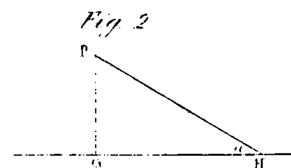

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47

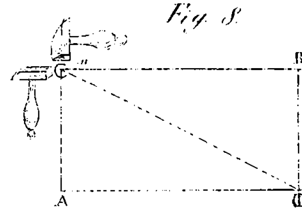

Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93

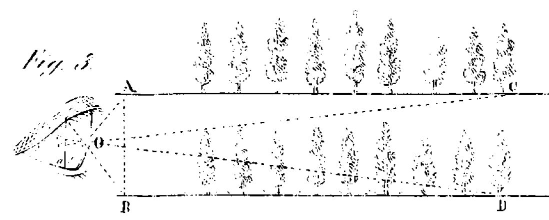

Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.

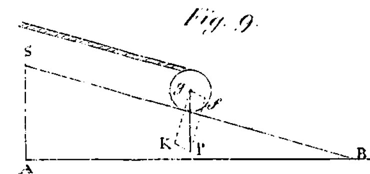

Fig. 1

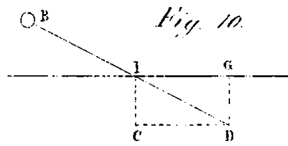

Fig. 7

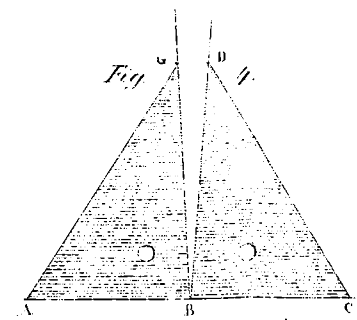

Fig. 2

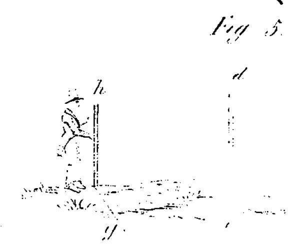

Fig. 8

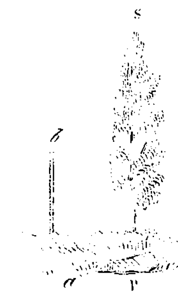

Fig. 3

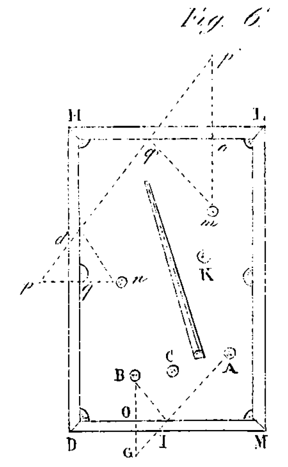

Fig. 9

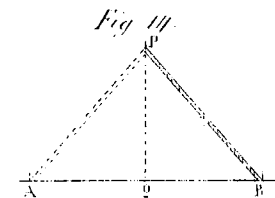

Fig. 10

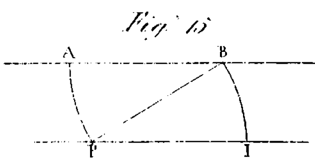

Fig. 4

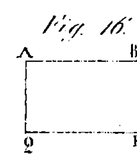

Fig. 5

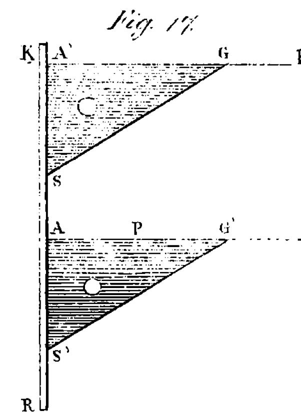


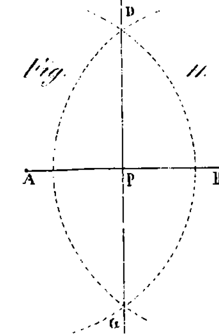

Fig. 6

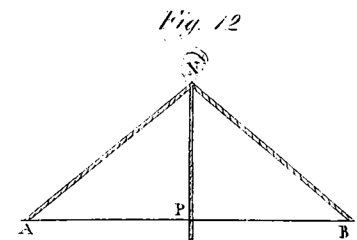

Fig. 14

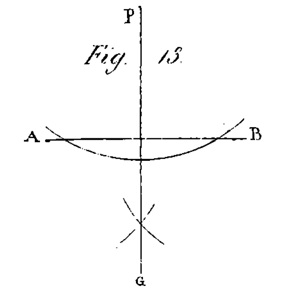

Fig. 15

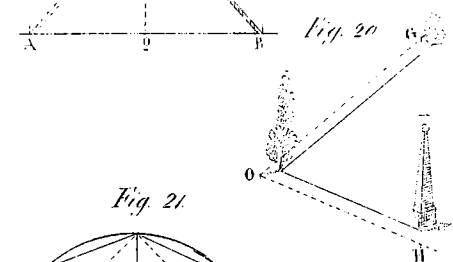

Fig. 16

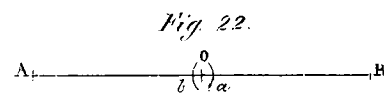

Fig. 17

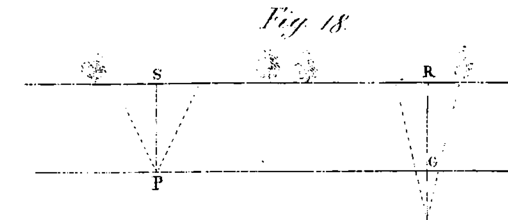

Fig. 11

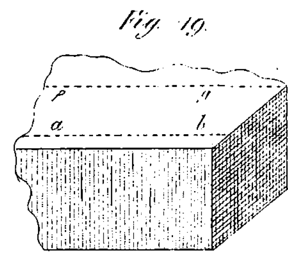

Fig. 12

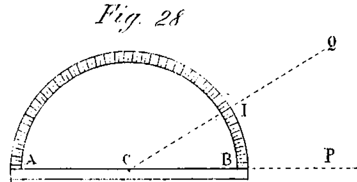

Fig. 13

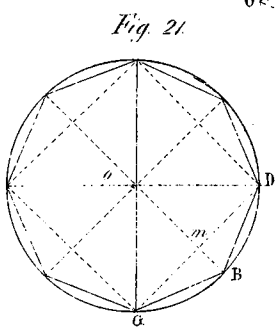

Fig. 20

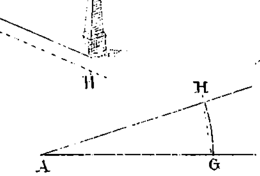

Fig. 22

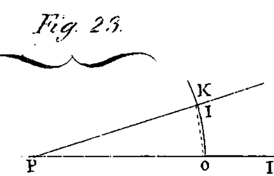

Fig. 18

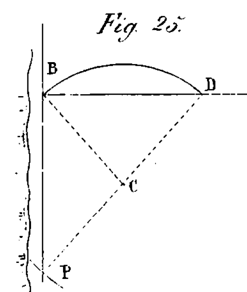

Fig. 19

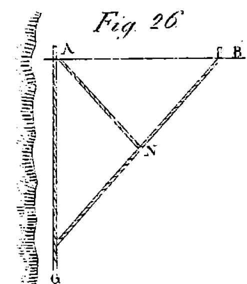

Fig. 28

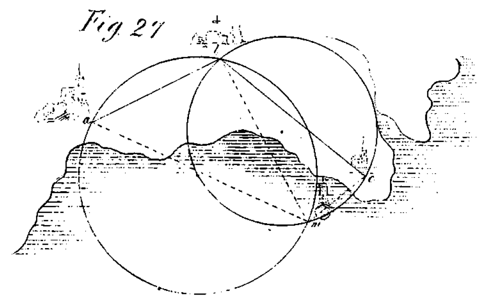

Fig. 21

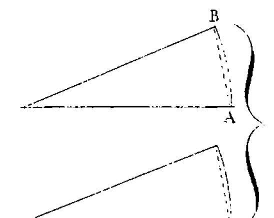


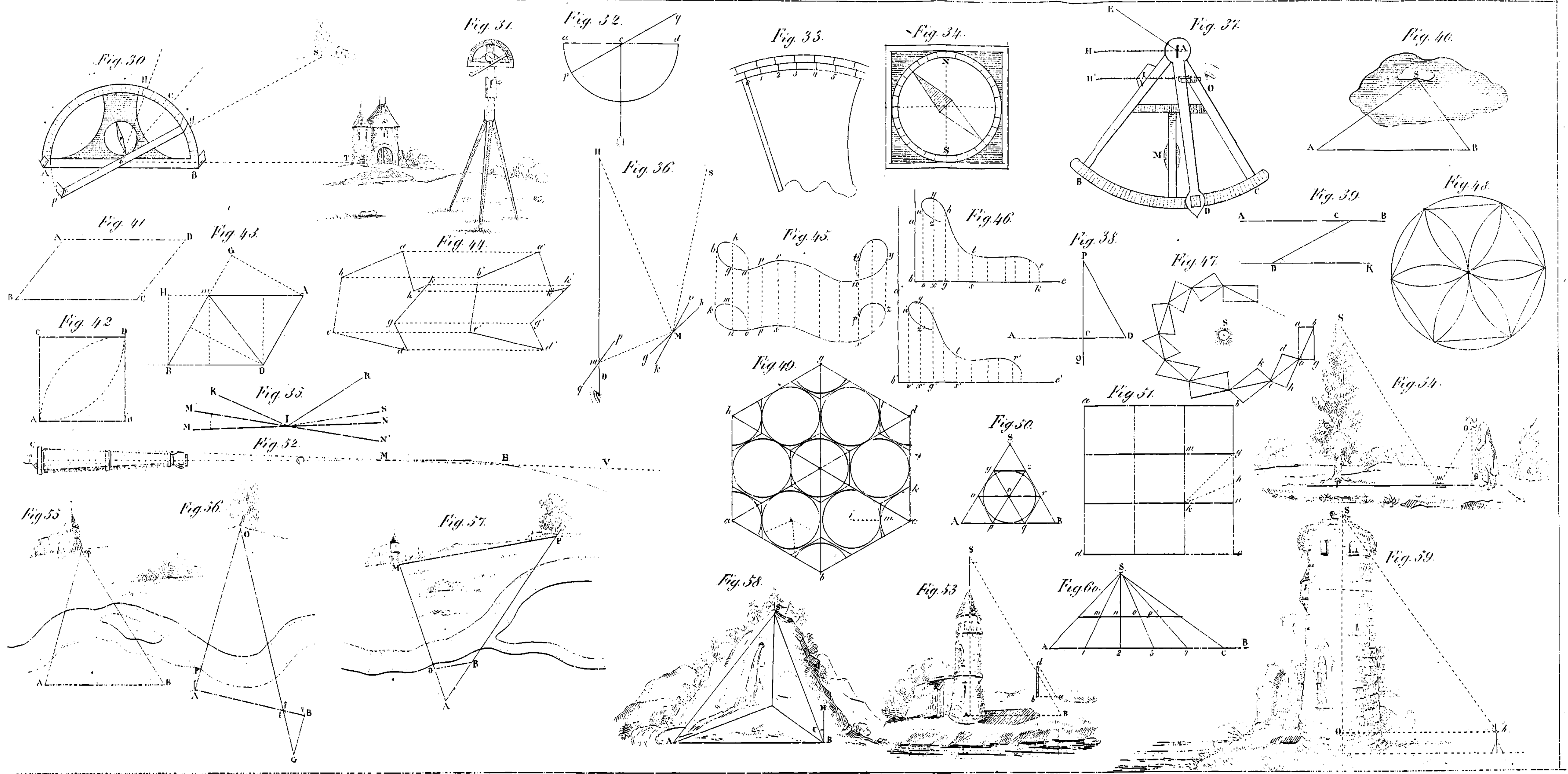

Fig. 23

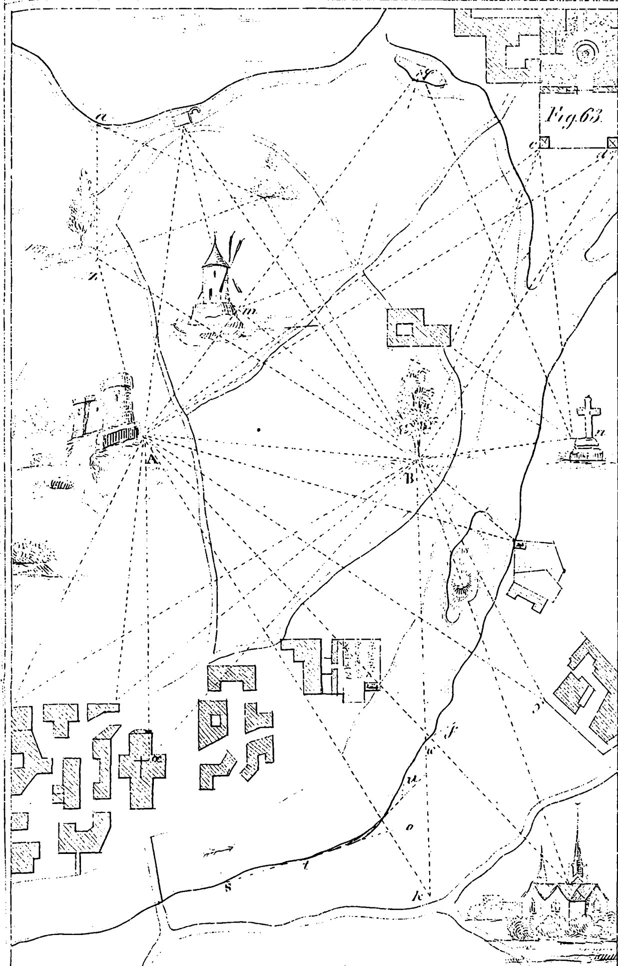

Fig. 24

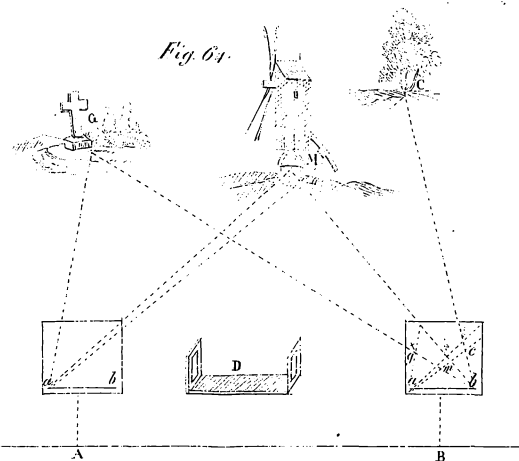

Fig. 25

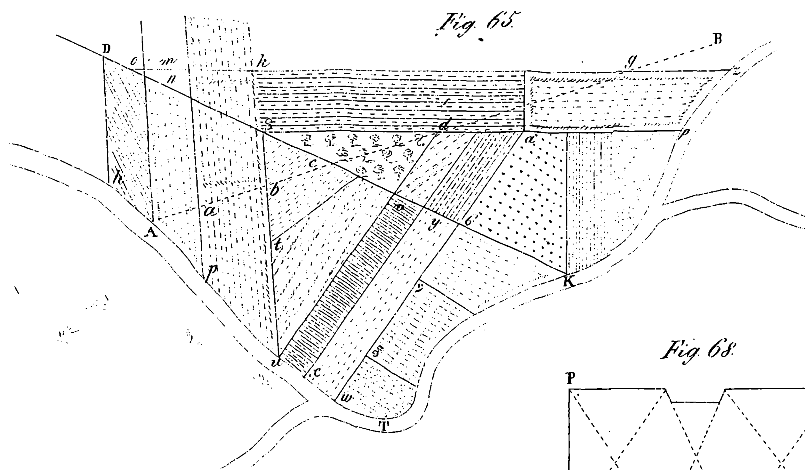

Fig. 26
Fig. 27

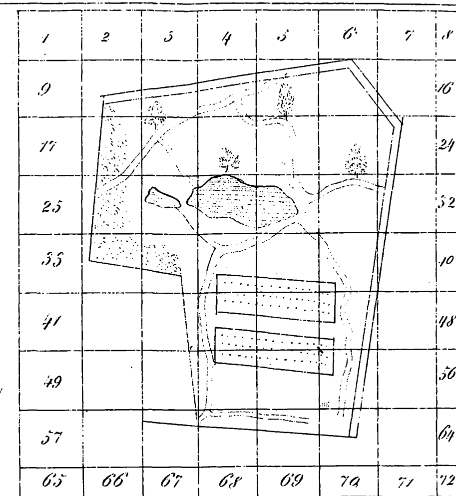

Fig. 29

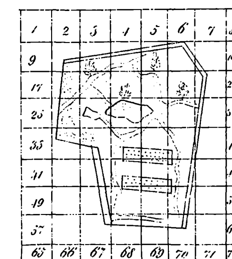


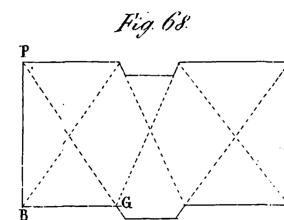


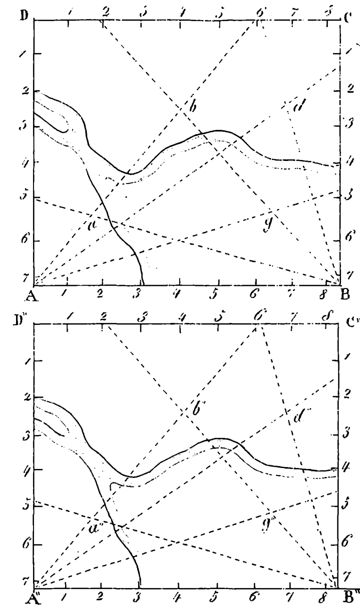

Fig. 64.

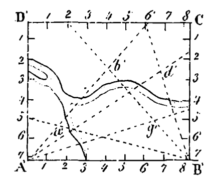

Fig. 65.

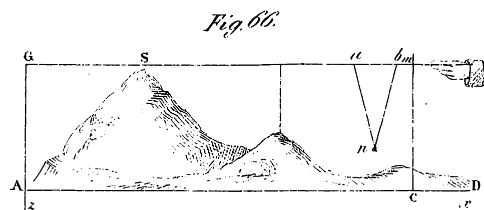


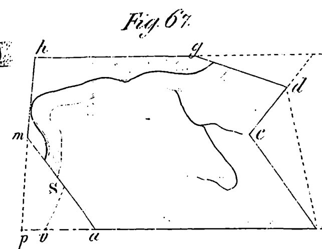

Fig. 62.

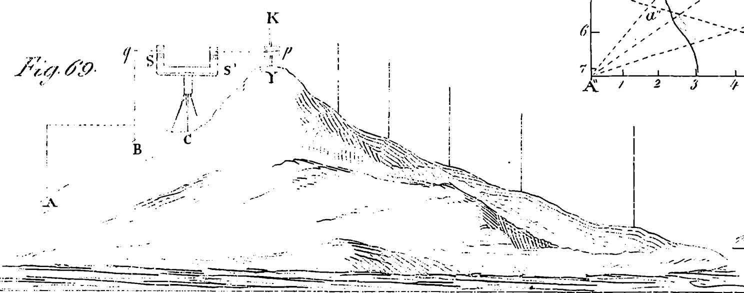

Fig. 68.

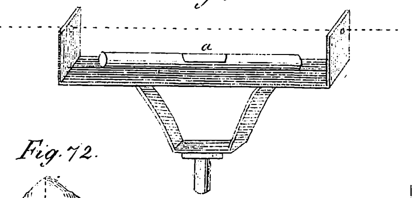


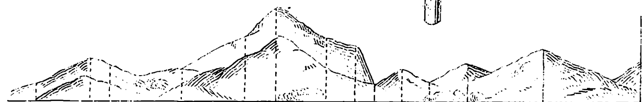

Fig. 61.

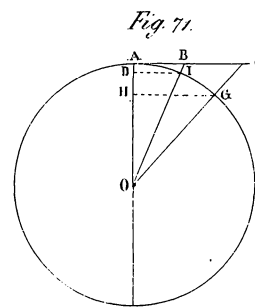

Fig. 66.

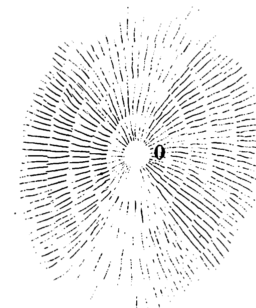

Fig. 67.

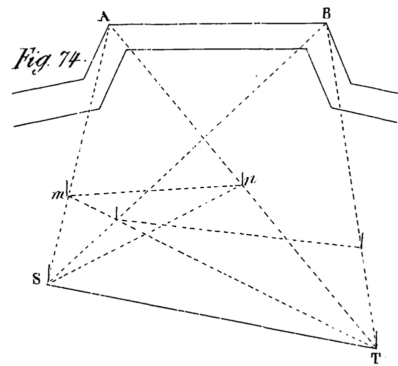

Fig. 69.


Fig. 70.


Fig. 72.


Fig. 71.


Fig. 73.


Fig. 74.

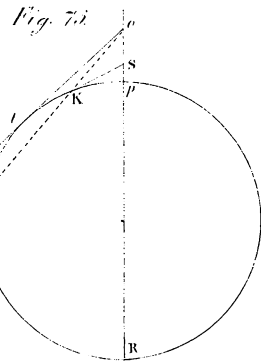


Fig. 75.

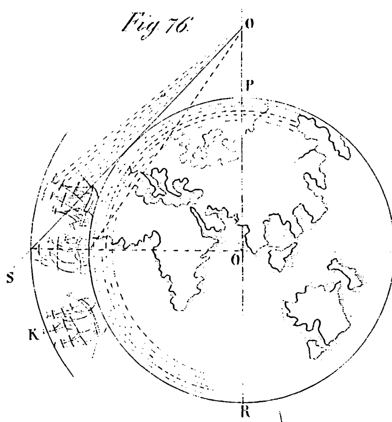
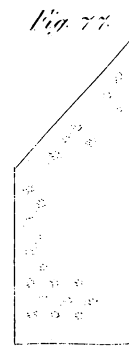


Fig. 76.


Fig. 77.

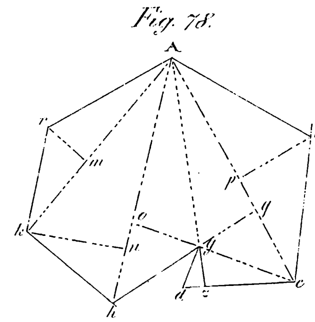


Fig. 78.

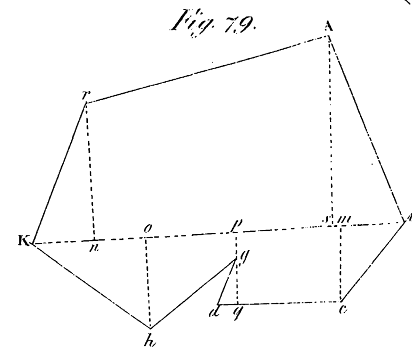
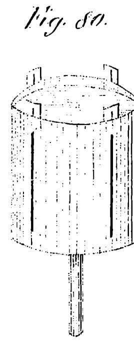
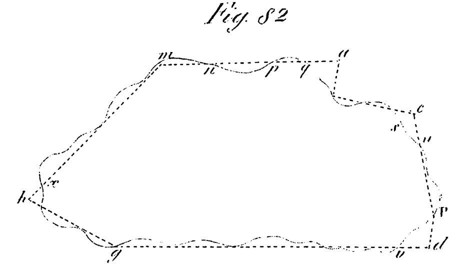


Fig. 79.


Fig. 80.


Fig. 82.

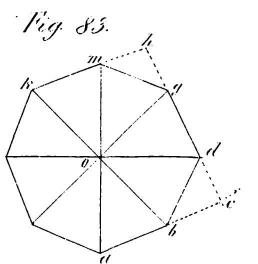


Fig. 83.

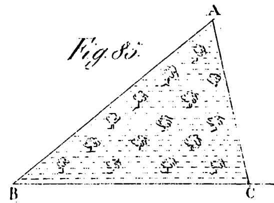


Fig. 85.

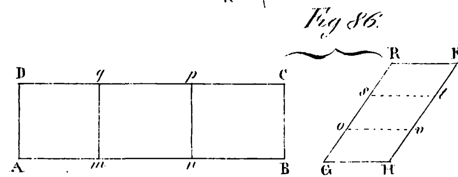


Fig. 86.

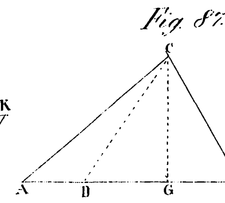


Fig. 87.

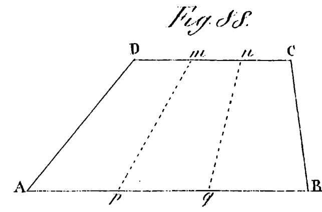


Fig. 88.

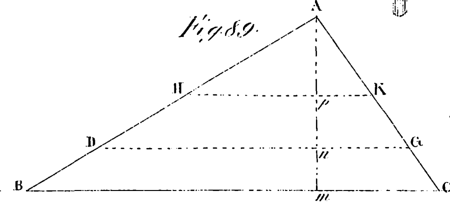


Fig. 89.

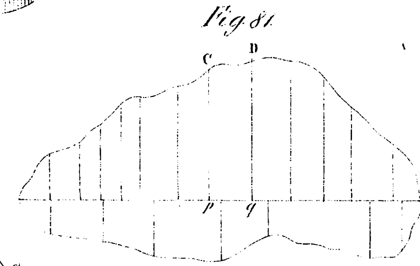
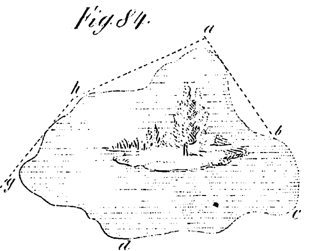


Fig. 81.


Fig. 84.

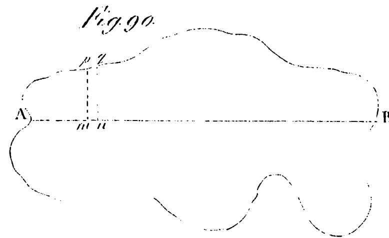


Fig. 90.

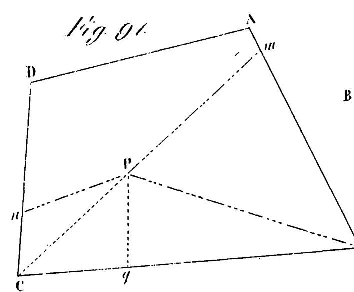


Fig. 91.

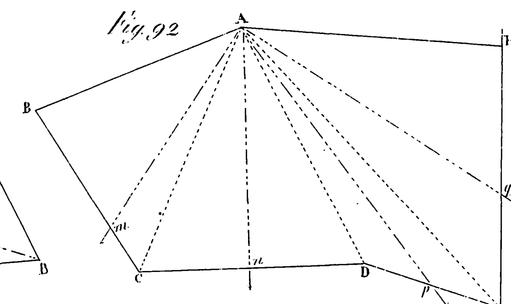


Fig. 92.

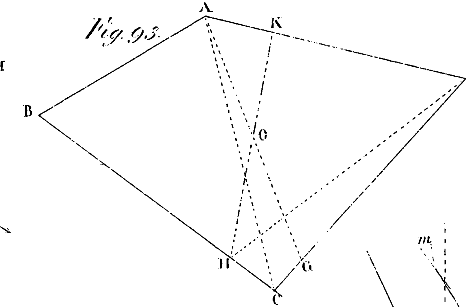


Fig. 93.

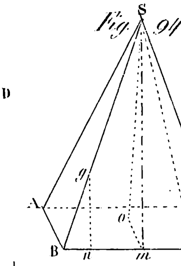


Fig. 94.

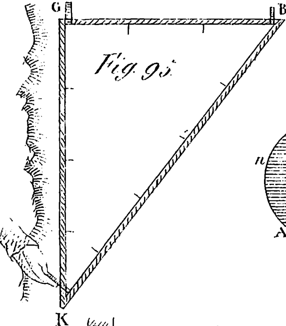


Fig. 95.

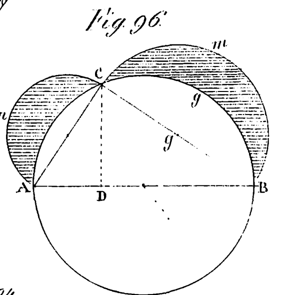


Fig. 96.

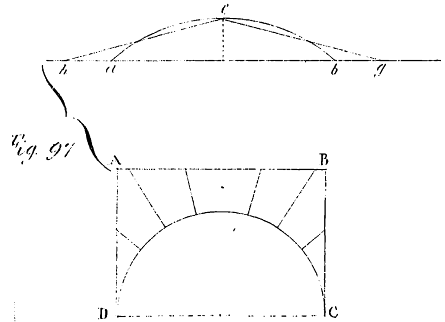


Fig. 97.

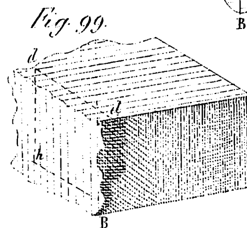


Fig. 99.

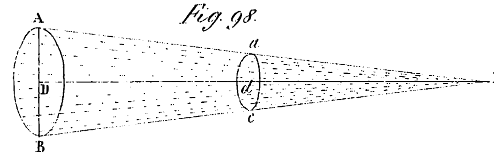


Fig. 98.

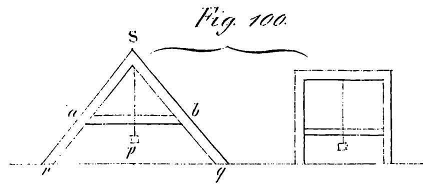


Fig. 100.

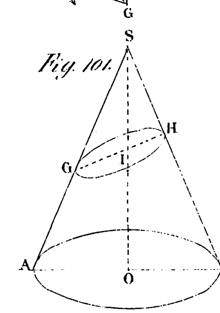


Fig. 101.

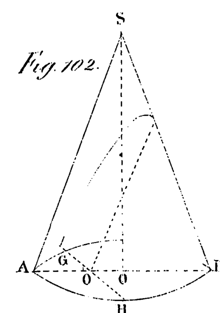


Fig. 102.

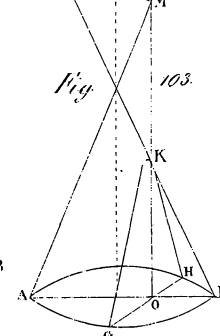


Fig. 103.

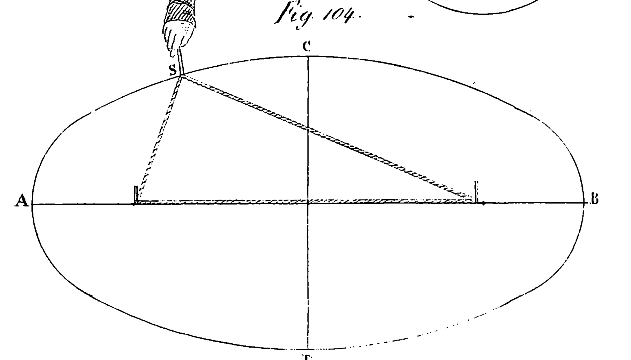


Fig. 104.